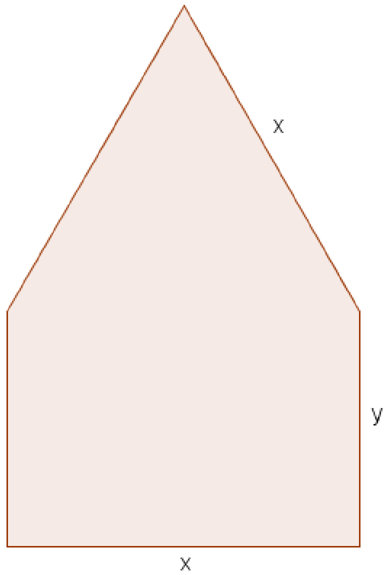
Problemas de optimización. Representaciones gráficas

1. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 6 m, halla sus dimensiones para que la superficie sea máxima.



$$P = 3x + 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6-3x}{2}$$

$$S = A_R + A_T = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = x \cdot \frac{6-3x}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \; ; 0 < x < 2$$

$$S' = 3 - 3x + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{2\left(6+\sqrt{3}\right)}{11} \text{ m} \; ; \; y = \frac{15-3\sqrt{3}}{11} \text{ m}$$

2. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?
Solución: Sean x el número de alarmas del tipo A e y el número de alarmas del tipo B:

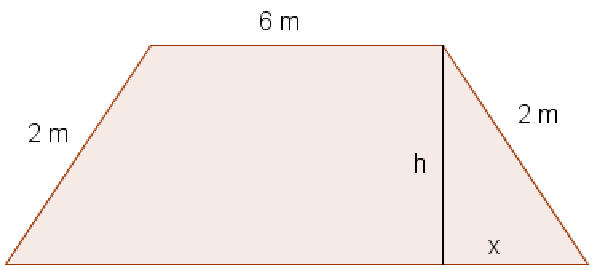
$$x + y = 9 \Rightarrow x = 9 - y$$

$$S = \frac{1}{10}xy^2 \Rightarrow S(y) = \frac{1}{10}(9-y)y^2 \; ; 0 < y < 9$$

$$S' = \frac{1}{10}\left(18y - 3y^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 6 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Sol: 3 de tipo A y 6 de tipo B.

3. La base menor de un trapecio isósceles mide 6 m y la longitud de los lados no paralelos es de 2 m. Calcula la longitud de la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.
Sol: $B = \sqrt{21} - 3 \simeq 1.58\text{m}$



Solución:

$$S = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

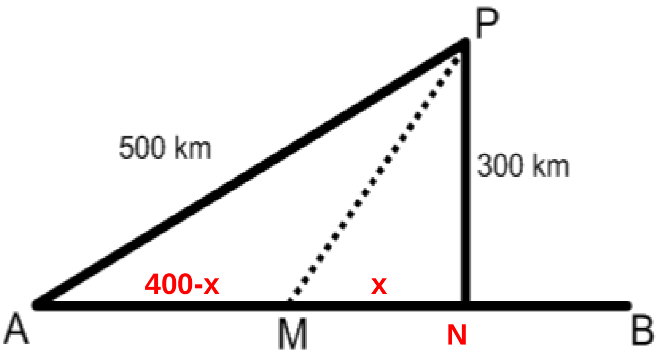
$$B = 6 + 2x \; ; \; h = \sqrt{2^2 - x^2}$$

$$S(x)=\frac{6+2x+6}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}\ ;\ S(x)=(6+x)\sqrt{4-x^2}\ ;\ 0<x<2$$

$$S'=\sqrt{4-x^2}-\frac{x(x+6)}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{2\left(x^2+3x-2\right)}{\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\\[2ex] x_2=\cancel{\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}}\end{cases}$$

Por tanto, la longitud de la base mayor es $B=6+2\cdot\dfrac{\sqrt{17}-3}{2}=3+\sqrt{17}\simeq 7.12\text{ m}$

4. En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.



Solución:

Primero se calculan las longitudes AN y MP:

$$\overline{AN}=\sqrt{500^2-300^2}=\sqrt{100^2\left(5^2-3^2\right)}=400\text{ km}\ ;\ \text{si } \overline{MN}=x\Rightarrow\overline{MP}=\sqrt{300^2+x^2}$$

Si se designa por T(x) el tiempo que tarda en recorrer la distancia AM+MP:

$$T(x)=\frac{400-x}{100}+\frac{\sqrt{300^2+x^2}}{60}$$

$$T'=\frac{-1}{100}+\frac{x}{60\sqrt{300^2+x^2}}=0\Rightarrow -60\sqrt{300^2+x^2}+100x=0$$

$$3\sqrt{300^2+x^2}=5x\ ;\ 9\left(300^2+x^2\right)=25x^2\Rightarrow 16x^2=9\cdot 300^2$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{9\cdot 300^2}{16}}=\pm\frac{3\cdot 300}{4}=\pm 225$$

El menor tiempo se obtiene para x = 225 km. Es decir recorrerá

$$\overline{AM}+\overline{MP}=400-225+\sqrt{300^2+225^2}=175+\sqrt{140625}=175+375=550\text{km}$$ y tardará

$T(225)=\dfrac{175}{100}+\dfrac{375}{60}=1.75+6.25=8\text{h}$. La velocidad media es $v_m=550/8\simeq 68.75\text{ km/h}$.

Problemas de optimización. Representaciones gráficas

5. Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Solución: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada viene dada por su derivada: $f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$. Por tanto se trata de hallar el máximo de esta función:

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \; ; \; f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 5 = 7$$

El punto donde la pendiente de la recta tangente es máxima es (2, 7) y su ecuación:

$$y - 7 = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y = 5x + 3$$

6. Determina las dimensiones de un cilindro para que utilizando el menor material posible se obtenga una capacidad de 1 dm^3.

Solución:

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} \; ; \; S = 2\pi r(r + h) \Rightarrow S = 2\pi r\left(r + \frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi\left(r^2 + \frac{1}{\pi r}\right)$$

$$S' = 2\pi\left(2r - \frac{1}{\pi r^2}\right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \; ; \; h = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt[3]{\left(1/2\pi\right)^2}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}; \; h = 2r$$

7. De todos los rectángulos de área S, halla: a) el de menor perímetro; b) el de menor diagonal.

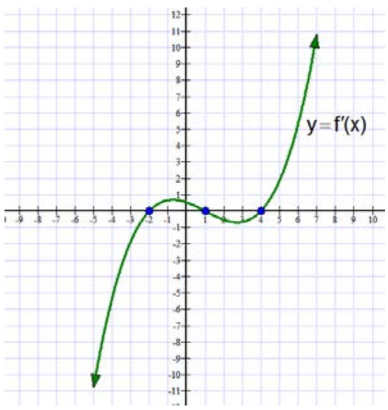
Solución:

$$S = xy \Rightarrow y = \frac{1}{x} \; ; \; P = 2x + 2y \Rightarrow P = 2x + \frac{2}{x} \; ; \; 0 < x < +\infty; \; P' = 2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \; ; \; D' = \frac{2x - 2/x^3}{2\sqrt{x^2 + 1/x^2}} = \frac{x^4 - 1}{x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 1}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

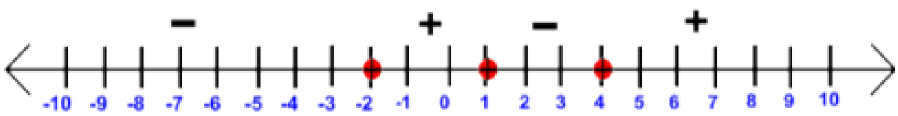
El rectángulo de menor perímetro y de menor diagonal es un cuadrado de lado 1.

8. Indica la monotonía y los puntos críticos de una función f(x) sabiendo que la gráfica de su función derivada es la representada en la Fig 2



Solución:

Se estudia el signo de la función derivada:



La función f(x) es creciente en: $(-2,1) \cup (4,+\infty)$

La función f(x) es decreciente en: $(-\infty,-2) \cup (1,4)$

Presenta dos mínimos relativos en x = −2 y x = 4.

Presenta un máximo relativo en x = 1.

Problemas de optimización. Representaciones gráficas

9. Halla la expresión algebraica de una función polinómica de grado 3 que presenta las siguientes características: Corta al eje de ordenadas en el punto (0,6); en el punto (1,−2) presenta un mínimo relativo y además cambia su curvatura en x=−2.

Solución:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f(0)=6 \Rightarrow d=6$; $f(1)=-2 \Rightarrow a+b+c+6=-2$; $a+b+c=-8$ [1]

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$ [2]

$f''(x)=6ax+2b$; $f''(-2)=0 \Rightarrow -12a+2b=0$; $b=6a$ [3]

Sustituyendo el valor de [3] en [2]: $c=-15a$ y sustituyendo en [1]:

$$a+6a-15a=-8 \Rightarrow a=1 ;\ b=6 ;\ c=-15$$

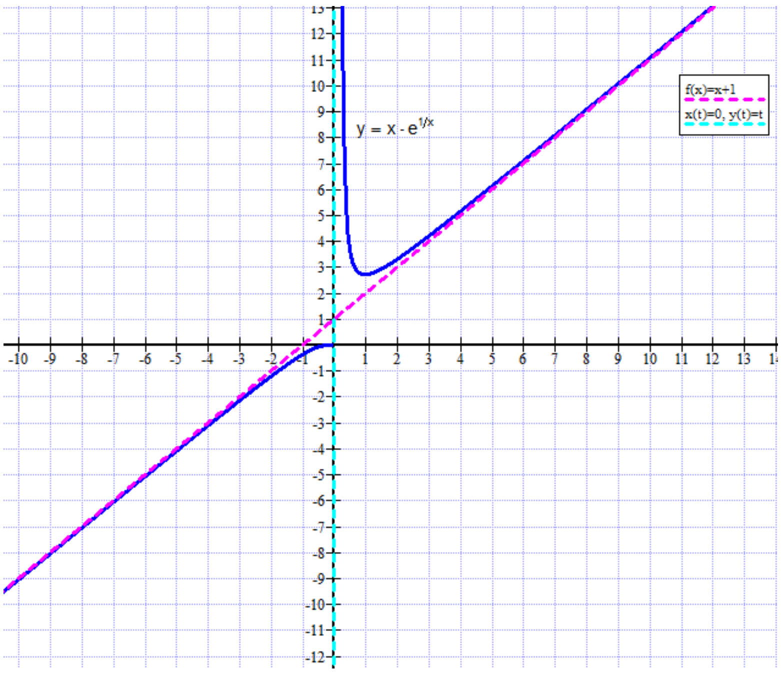
Por tanto la función buscada es: $f(x)=x^3+6x^2-15x+6$

10. Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x)=x\cdot e^{1/x}$; b) $f(x)=3\cos(x+\pi)$; c) $f(x)=\ln|x|$; d) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$; e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

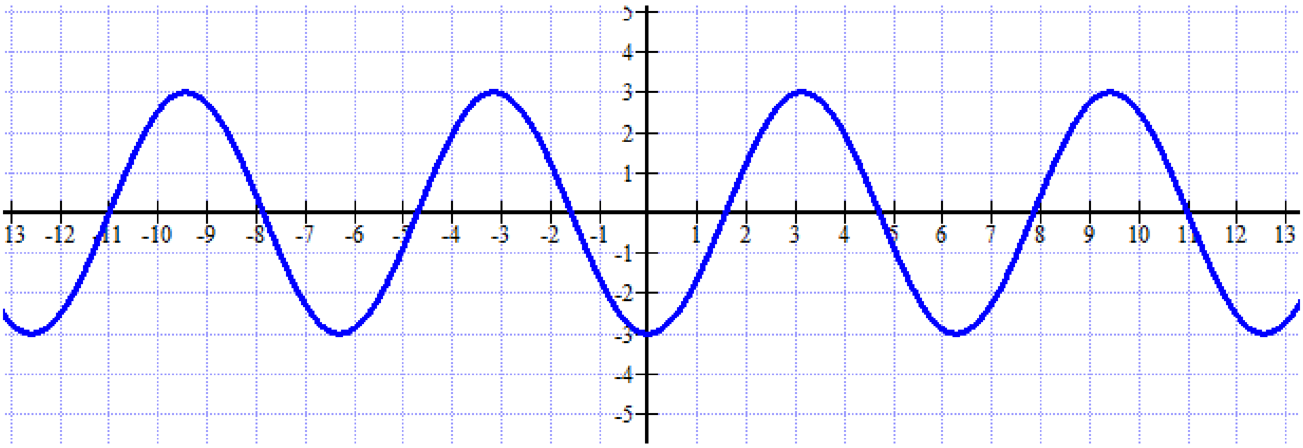
A continuación se expone la gráfica junto con sus asíntotas de cada función:

a) $f(x)=x\cdot e^{1/x}$

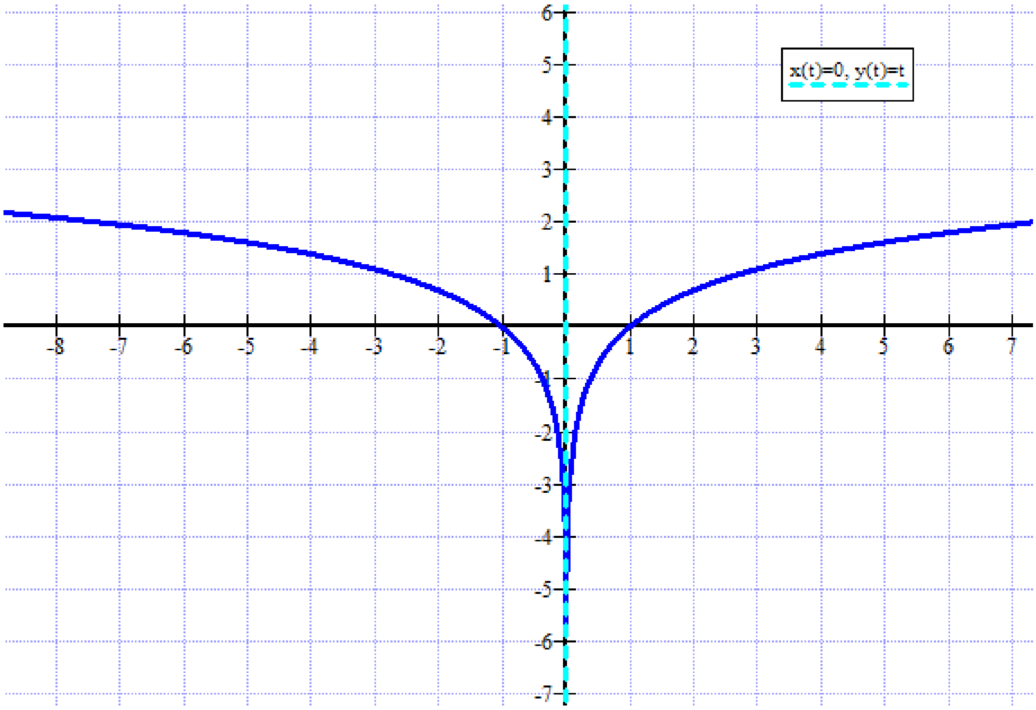


Problemas de optimización. Representaciones gráficas

b) $f(x) = 3\cos(x + \pi)$

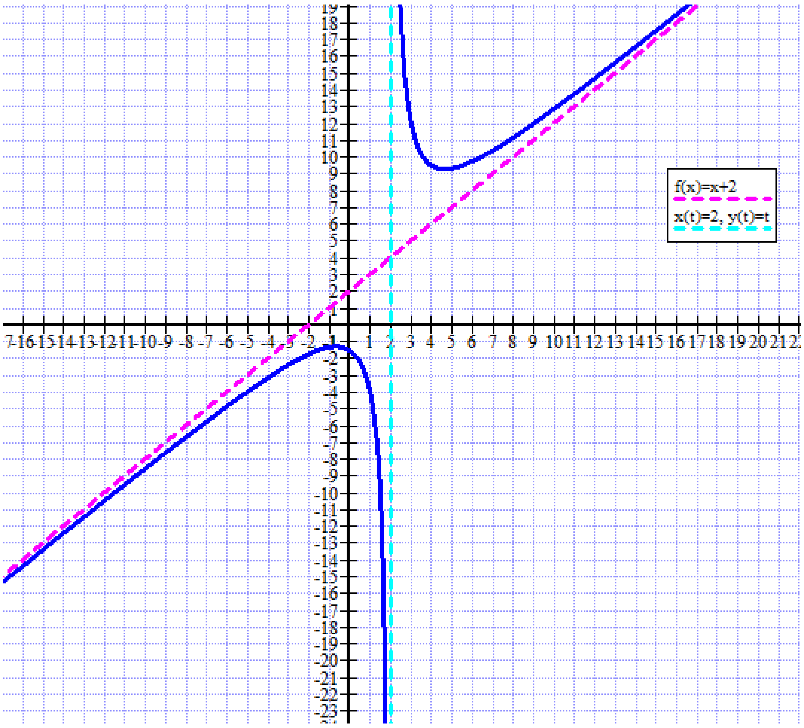


c) $f(x) = \ln|x|$



Problemas de optimización. Representaciones gráficas

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-2}$



e) $f(x)\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$