Radicales, Logaritmos, Polinomios y Ecuaciones

1. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Solución:

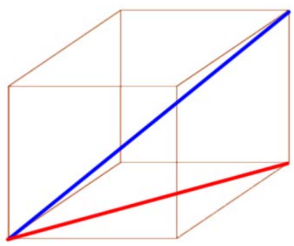
a) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

b) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{9+6\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\cdot 2}{9-4\cdot 2}=13+9\sqrt{2}$

c) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2\sqrt{5}+2+5+\sqrt{5}}{5-1}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{15}+3}{5-3}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{15}+3}{2}$

2. Halla la diagonal de un cubo de 6 cm de arista. Expresa el resultado en forma de radical.



Solución:

$$D=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=6\sqrt{3}\text{ cm}$$

3. Calcula:

a) $\dfrac{\log_2 8^{-1}}{\log_2 4}$; b) $\log_2 16+\log_3\sqrt[3]{81}$; c) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3}\cdot\log_3 18-\log_3 4$; d) $\log_2 54-\log_2 27+\log_2\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\dfrac{\log_2 8^{-1}}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^{-3}}{\log_2 2^2}=\dfrac{-3}{2}$ b) $\log_2 16+\log_3\sqrt[3]{81}=\log_2 2^4+\log_3 3^{4/3}=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$

c) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 3}\cdot\log_3 18-\log_3 4=\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 3}\cdot\log_3\left(2\cdot 3^2\right)-\log_3 2^2=2\cdot\left(\log_3 2+2\log_3 3\right)-2\log_3 2=4$

d) $\log_2 54-\log_2 27+\log_2\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{2}}=\log_2\dfrac{2\cdot 3^3}{3^3}+\log_2\sqrt[3]{\sqrt{\left(2^2\right)^2\cdot 2}}=1+\log_2\sqrt[6]{2^5}=1+\dfrac{5}{6}=\dfrac{11}{6}$

4. Calcula durante cuánto tiempo se ha de invertir un capital a un interés compuesto del 3% anual para que se duplique.

Solución:

$C_f=2C_i\Rightarrow 2C_i=C_i\left(1+0.03\right)^t$; $2=1.03^t\Rightarrow\log 2=t\cdot\log 1.03\Rightarrow t=\dfrac{\log 2}{\log 1.03}\simeq 23.45$ años.

Deben transcurrir 24 años.

5. Una célula se reproduce por bipartición cada 5 horas. Si se parte inicialmente de 400 células, ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya 1 millón de células?

Solución:

$a_0 = 400$; $a_1 = 400 \cdot 2 = 800$; $a_2 = 400 \cdot 2^2 = 1600$;… ; $a_n = 400 \cdot 2^n$

$$a_n = 10^6 \Rightarrow 10^6 = 400 \cdot 2^n \; ; \; 2^n = \frac{10^6}{400} \Rightarrow n \log_2 2 = \log_2 \frac{10^6}{400} \; ; \; n \simeq 11.29$$

Por tanto son necesarias $n = 12$ biparticiones para obtener un millón de células, y como cada bipartición tiene lugar cada 5 horas, son necesarias 5·12 = 60 horas.

6. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(x-1)^2$ b) $(2x+3)^2$ c) $(2x-4)(2x+4)$ d) $(2x+1)^3$

Solución:

a) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; b) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$; c) $(2x-4)(2x+4) = 4x^2 - 16$

d) $(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

7. ¿Puede ser x = 3 una raíz del polinomio $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 7$? Justifica la respuesta.

Solución:

No, porque 3 no es un divisor de 7.

8. Halla el valor de m para que el resto de la siguiente división sea 5: $(x^4 + mx^2 - 6x + 2) : (x+1)$

Solución:

$P(-1) = 5 \Rightarrow (-1)^4 + m \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 2 = 5 \Rightarrow 1 + m + 6 + 2 = 5 \Rightarrow m = 5 - 9 \Rightarrow m = -4$

9. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ c) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ d) $2x^5 - 3x^4 + x^2$

Solución:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{|0} \\ -2 & & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{|0} & \end{array}$$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$

b) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & & 1 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \underline{|0} \\ 1 & & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -3 & \underline{|0} & \end{array}$$

$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2 (x-3)$

$x_1 = 1$ (doble) ; $x_2 = 3$

c) $x^4-9x^2+4x+12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & \underline{|0} \\ 2 & & 2 & 2 & -12 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \underline{|0} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & \underline{|0} \end{array}$$

$x^4-9x^2+4x+12=(x+1)(x-2)^2(x+3)\Rightarrow x_1=1\,;\ x_2=2\ (\text{doble})\,;\ x_3=-3$

d) $2x^5-3x^4+x^2=x^2\left(2x^3-3x^2+1\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & \underline{|0} \\ -1/2 & & -1 & 1 & \\ \hline & 2 & -2 & \underline{|0} & \end{array}$$

$2x^5-3x^4+x^2=2x^2(x-1)^2(x+1/2)$

$x_1=0\ (\text{doble})\,;\ x_2=1\ (\text{doble});\ x_3=-1/2$

10. Escribe un polinomio de tercer grado que tenga por raíces $x_1=2\,;\ x_2=-3\,;\ x_3=-1$ y que para $x = 1$ su valor numérico sea −8.

Solución:

$P(x)=a(x-2)(x+3)(x+1)\,;\ P(1)=a(-1)\cdot 4\cdot 2=-8\Leftrightarrow a=1$

$P(x)=(x-2)(x+3)(x+1)=x^3+2x^2-5x-6$

11. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, simplificando al máximo.

a) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}$ b) $\left(x+\dfrac{x}{1-x}\right):\left(x-\dfrac{x}{1-x}\right)$ c) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x+1}{x^2+x}$ d) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\cdot\dfrac{3x^2}{x+2}$

Solución:

a) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{2(x-3)-2(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{-12}{(x+3)(x-3)}$

b) $\left(x+\dfrac{x}{1-x}\right):\left(x-\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{x(1-x)+x}{1-x}:\dfrac{x(1-x)-x}{1-x}=\dfrac{2x-x^2}{1-x}:\dfrac{\left(-x^2\right)}{1-x}=\dfrac{\left(2x-x^2\right)}{-x^2}=\dfrac{x(2-x)}{-x^2}=\dfrac{x-2}{x}$

c) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x+1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x+1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1-x}{x^2}$;

d) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)\cdot\dfrac{3x^2}{x+2}=\dfrac{x+2}{x^2}\cdot\dfrac{3x^2}{x+2}=3$

12. Calcula los valores de m y n para que el polinomio $P(x)=x^4+x^3+mx^2-3x+n$ sea divisible por $(x+1)$ y $(x-2)$

Solución:

$$P(-1)=(-1)^4+(-1)^3+m(-1)^2-3(-1)+n=m+n+3=0$$

$$P(2)=2^4+2^3+m\cdot 2^2-3\cdot 2+n=4m+n+18=0$$

$$\begin{cases} m+n=-3 \\ 4m+n=-18 \end{cases} \Rightarrow (m,n)=(-5,2)$$

$$P(x)=x^4+x^3-5x^2-3x+2$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4-625=0$ b) $x^4-10x^2+9=0$ c) $x^6-8x^3=0$ d) $x^6-26x^3-27=0$

e) $\frac{2}{x}+x=-3$ f) $\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}$ g) $\frac{3x+2}{x+1}-2=\frac{3}{4}$ h) $\frac{4}{x+3}-\frac{1}{x-2}=2$

i) $x-\sqrt{x}=2$ j) $\sqrt{x-1}-x+7=0$ k) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=7$ l) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

Solución:

a) $x^4-625=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{625}=\pm 5$

b) $$x^4-10x^2+9=0\ ;\ t=x^2 \Rightarrow t^2-10t+9=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=9 \Rightarrow \begin{cases} x_1=+\sqrt{9}=3 \\ x_2=-\sqrt{9}=-3 \end{cases} \\ t_2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_3=+\sqrt{1}=1 \\ x_4=-\sqrt{1}=-1 \end{cases} \end{cases}$$

c) $$x^6-8x^3=0 \Rightarrow x^3\left(x^3-8\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\sqrt[3]{8}=2 \end{cases}$$

d) $$x^6-26x^3-27=0\ ;\ t=x^3 \Rightarrow t^2-26t-27=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=27 \Rightarrow x_1=\sqrt[3]{27}=3 \\ t_2=-1 \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{-1}=-1 \end{cases}$$

e) $$\frac{2}{x}+x=-3 \Rightarrow 2+x^2=-3x \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

f) $$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6} \Rightarrow 6x=6(x+3)-x(x+3) \Rightarrow x^2+3x-18=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-6 \end{cases}$$

g) $\dfrac{3x+2}{x+1}-2=\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4(3x+2)-2\cdot 4(x+1)=3(x+1) \Rightarrow 12x+8-8x-8=3x+3 \Rightarrow x=3$

h) $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{1}{x-2}=2 \Rightarrow 4(x-2)-(x+3)=2(x+3)(x-2) \Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1/2 \end{cases}$

i) $x-\sqrt{x}=2 \Rightarrow x-2=\sqrt{x} \Rightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=\cancel{1} \end{cases}$

j) $\sqrt{x-1}-x+7=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-7)^2 \Rightarrow x^2-15x+50=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=10 \\ x_2=\cancel{5} \end{cases}$

k) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=7 \Rightarrow \left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(7-\sqrt{3x+4}\right)^2 \Rightarrow x+52=14\sqrt{3x+4}$

$$(x+52)^2=\left(14\sqrt{3x+4}\right)^2 \Rightarrow x^2-484x+1920=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\cancel{480} \\ x_2=4 \end{cases}$$

l) $x-\sqrt{25-x^2}=1 \Rightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 \Rightarrow 2x^2-2x-24=0$;

$$x^2-x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=\cancel{-3} \end{cases}$$

14. Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_x 16=2$ b) $\log(22-x)+1=\log x$ c) $3\log x=\log x^2+\log 3$ d) $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$

Solución:

a) $\log_x 16=2 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=+\sqrt{16}=4$

b) $\log(22-x)+1=\log x \Rightarrow \log\left[(22-x)\cdot 10\right]=\log x \Rightarrow 220-10x=x \Rightarrow x=20$

c) $3\log x=\log x^2+\log 3 \Rightarrow \log x^3=\log\left(3x^2\right) \Rightarrow x^3=3x^2 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=3$

Observación: $x=0$ no es solución porque $\nexists \log 0$.

d) $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3 \Rightarrow \log(4x)=\log\left[3(x+1)\right] \Rightarrow 4x=3x+3 \Rightarrow x=3$