

PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios .

1.- FENÓMENOS DETERMINÍSTICOS Y ALEATORIOS.

1.1. Se dice que un experimento es aleatorio, si no se puede predecir, en el sentido ordinario, el resultado antes de llevar a cabo el experimento. También es necesario que se pueda repetir el experimento.

1.2. Se dice que un experimento es determinista si se puede predecir el resultado antes de llevar a cabo el experimento.

2.-CONCEPTO DE PROBABILIDAD COMO MODELO MATEMÁTICO

Si se lleva a cabo un experimento, cualquier situación que se dé puede llamarse un **SUCESO**.

Al construir un modelo matemático de un fenómeno aleatorio, debemos incluir en él maneras de describir (i) casos posibles;
(ii) sucesos y
(iii) probabilidades de sucesos.

También hay que dar reglas para combinar sucesos y probabilidades.

3.- PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD RESPECTO DE OPERACIONES CON SUCESOS.

3.1. Espacio muestral. El conjunto cuyos elementos son los posibles resultados recibe el nombre de **espacio muestral**.

Sucesos: un suceso es un subconjunto del espacio muestral.

Sucesos elementales: los subconjuntos del espacio muestral formados por un solo elemento.

A los sucesos que son unión de sucesos elementales los llamaremos **sucesos compuestos**.

Operaciones con sucesos.

SUCESO CONTENIDO EN OTRO: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que A está contenido en B y lo representaremos por $A \subset B$, si siempre que ocurre A, ocurre el suceso B.

IGUALDAD DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que A es igual a B, si siempre que ocurre A ocurre B y recíprocamente, es decir si se verifica que $A \subset B$ y $B \subset A$. Lo representaremos por $A=B$.

UNIÓN DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la unión de A y B como el suceso C que ocurre siempre que ocurra el A o siempre que ocurra B. Lo representaremos por $A \cup B$

INTERSECCIÓN DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la intersección de A y B, como aquel suceso D que ocurre siempre que ocurren A y B simultáneamente. Lo representaremos por $A \cap B$.

SUCESO CONTRARIO O COMPLEMENTARIO DE OTRO DADO: Dado el suceso A de un experimento aleatorio, se define el suceso contrario o complementario de A como aquel suceso que ocurre siempre que no ocurre el suceso A. Lo representaremos por A^c o por \bar{A} .

SUCESO SEGURO: Llamaremos suceso seguro al suceso que ocurre siempre. Lo representaremos por E ya que coincide con el espacio muestral.

SUCESO IMPOSIBLE, \emptyset , es el suceso que no ocurre nunca.

De forma inmediata se demuestra que $A \cap \bar{A} = \emptyset$ y $A \cup \bar{A} = E$.

SUCESOS INCOMPATIBLES: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, diremos que son incompatibles si siempre que ocurre el suceso A, no puede ocurrir el suceso B, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

DIFERENCIA DE SUCESOS: Dados dos sucesos A y B de un cierto experimento aleatorio, se define la diferencia de los sucesos A y B, que representaremos por $A - B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurra A y no ocurra B. Observemos que $A - B = A \cap \bar{B}$.

Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad de cada suceso es un número. Se han de cumplir las siguientes propiedades:

Cualquiera que sea el suceso S , $P(S) \geq 0$

Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E) = 1$

Teoremas: Se deducen de las propiedades

T.1 : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

T.2 : $P(\emptyset) = 0$

T.3 : Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$, entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$

T.4 : Si A_1, A_2, \dots, A_k son incompatibles dos a dos, entonces: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$

T.5 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T.6 : Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, entonces: $P(S) = P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_k)$

Ejercicios de probabilidad

1. El 70% de empresas tiene errores en sus activos financieros, el 60% tiene errores en sus pasivos financieros y el 40% tiene errores en sus activos y en sus pasivos financieros. Obtén razonadamente el porcentaje de empresas sin errores en sus activos, en sus pasivos o en ambos. De una muestra de 500 empresas, ¿cuántas se espera que no tengan errores ni en sus activos ni en sus pasivos financieros?
2. Encuentra el espacio muestral del experimento lanzar dos monedas. Si se define el suceso A = "al menos una sea cara", ¿de cuántos sucesos elementales consta A ? ¿Cuál es el suceso contrario de A ?
3. Si consideramos el suceso A = sacar dos cruces, al lanzar dos monedas, calcula el complementario de A , es decir A^c
4. Se extraen dos cartas de una baraja española. Si A = " las dos sean copas" y B = " una sea copas y la otra rey" , calcula $A \cap B$
5. Una bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en extraer una bola. Si consideramos los sucesos A = "obtener número primo" y B = " obtener múltiplo de 3" escribe los sucesos $A, B, A \cup B, A \cap B, A \cup A', A \cap A'$
6. Si lanzamos un dado dos veces escribe todos los resultados posibles. ¿Cuántos de estos sucesos componen el suceso A = "el primero salió un 6". Repite este ejercicio realizando el lanzamiento 3 veces.
- 7: Cada pregunta de un examen tiene dos respuestas alternativas de las que sólo una es correcta. Un alumno contesta al azar un examen de este tipo con tres preguntas.
 - a) Construya un espacio muestral adecuado a esta experiencia.
 - b) Calcule $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(C)$, $p(B \cup C)$, siendo A, B y C los siguientes sucesos:
 - A = "El alumno contesta correctamente la primera pregunta"
 - B = "El alumno contesta correctamente dos de las tres preguntas"
 - C = "El alumno contesta correctamente las tres preguntas".
- 8: Consideremos el experimento lanzar dos monedas al aire. Calcular la probabilidad del suceso sacar una cara y una cruz.
- 9 Calcula la probabilidad de obtener dos 6 al lanzar dos dados.
10. Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea negra?

Ejercicios:

1 Sean A y B dos sucesos aleatorios con: $p(A) = \frac{3}{8}$ $p(B) = \frac{1}{2}$ $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Halla: 1 $p(A \cup B)$ 3 $p(\bar{B})$ 5 $p(\bar{A} \cup \bar{B})$ 7 $p(B \cap \bar{A})$
 2 $p(\bar{A})$ 4 $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ 6 $p(A \cap \bar{B})$

2 Sean A y B dos sucesos aleatorios con: $p(\bar{A}) = \frac{2}{3}$ $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Halla: 1 $p(A)$ 2 $p(B)$ 3 $p(A \cap \bar{B})$

3 Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra.

Escribid el espacio muestral cuando: 1 La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

2 La primera bola no se devuelve.

4 Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarilla y siete verdes. Si se extrae una bola al azar calcula la probabilidad de:

1 Sea roja. 3 Sea amarilla. 5 No sea amarilla.

2 Sea verde. 4 No sea roja.

5 Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribid el espacio muestral y hallad la probabilidad de los sucesos: 1 Con reemplazamiento. 2 Sin reemplazamiento.

6 Se extrae una bola de una urna que contiene 4 bolas rojas, 5 blancas y 6 negras, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja o blanca? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea blanca?

7 En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, cinco alumnos rubios y 10 morenos. Un día asisten 45 alumnos, encontrad la probabilidad de que un alumno:

1 Sea hombre.

8 Un dado está trucado, de forma que las probabilidades de obtener las distintas caras son proporcionales a los números de estas. Halla

1 La probabilidad de obtener el 6 en un lanzamiento. 2 La probabilidad de conseguir un número impar en un lanzamiento.

9 Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:

1 La probabilidad de que salga 7.

2 La probabilidad de que el número obtenido sea par.

3 La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

10 Se lanzan tres dados. Encontrar la probabilidad de que:

1 Salga 6 en todos. 2 Los puntos obtenidos sumen 7.

11 Halla la probabilidad de que al levantar unas fichas de dominó se obtenga un número de puntos mayor que 9 o que sea múltiplo de 4.

12 Busca la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga: 1 Un número par. 2 Un múltiplo de tres. 3 Mayor que cuatro.

13 Halla la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan: 1 Dos caras. 2 Dos cruces. 3 Una cara y una cruz.

14 En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Halla la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche: 1 Si se saca una papeleta. 2 Si se extraen dos papeletas. 3 Si se extraen tres papeletas.

15 Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de $\frac{1}{10}$. Determina la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen.

16 Dos hermanos salen de caza. El primero mata un promedio de 2 piezas cada 5 disparos y el segundo una pieza cada 2 disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo a una misma pieza, ¿cuál es la probabilidad de que la maten?

Ejercicios:

- 1.- Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
 - a. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
 - b. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.
 - c. Anotar el sexo de los hijos en familias con cuatro hijos
 - d. El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos.

- 2.- Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcula:
 - a. El espacio muestral.
 - b. El suceso $A = \{\text{extraer tres bolas del mismo color}\}$.
 - c. El suceso $A = \{\text{extraer al menos una bola blanca}\}$.
 - d. El suceso $A = \{\text{extraer una sola bola negra}\}$.

- 3.- ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3,4 y 5?
¿Cuántos empiezan por 3? ¿Cuántos son mayores que 400?

- 4.- Una urna contiene una bola verde, una bola azul y una bola roja. Obtend el espacio muestral del experimento que consiste en sacar sucesivamente y sin reemplazamiento dos bolas de la urna. ¿Cuál es el espacio muestral si se extraen con reemplazamiento?

- 5.- ¿Cuántas parejas se pueden formar con las 5 vocales si no se pueden repetir? ¿Y si si pueden repetirse?

- 6.- Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Sea A el suceso “*el hijo mayor es una hembra*”, y B el suceso “*los dos hijos pequeños son varones*”.
¿Cuáles son los elementos de A y B?

Ejercicios con sucesos.

- 1.- Se sacan sucesivamente dos bolas de una urna que contiene una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describid el espacio muestral cuando:
 - a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda
 - b) La primera bola no se devuelve

- 2.- Una urna contiene bolas numeradas con los dígitos 1, 3, 5 y 7. Se extraen sucesivamente y sin reemplazamiento 3 bolas de la urna y se anota el número obtenido. Utilizad un diagrama de árbol para calcular el número de resultados posibles del experimento. ¿Cuántos son mayores que 500? ¿Cuántos empiezan por 3? Si los ordenamos de menor a mayor, ¿cuál ocupa el décimo lugar?

- 3.- En el experimento de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:
 $A = \text{“sacar exactamente dos cruces”}$
 $B = \text{“que en la primera tirada salga una cruz”}$
 - a) Obtener el espacio muestral y los sucesos A y B
 - b) Calcular y explicar el significado de los sucesos:
 $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \setminus A$

4.- Se considera el experimento consistente en lanzar tres monedas al aire y anotar el resultado de las caras superiores. Se pide:

- a) Espacio muestral.
- b) Número de elementos del espacio de sucesos.
- c) Suceso "obtener al menos dos caras"
- d) Suceso "obtener como mínimo dos cruces"
- e) Suceso "obtener como máximo dos caras"
- f) Suceso "obtener tres caras o tres cruces"

5.- Sean los sucesos: $A = \text{"llueva hoy"}$ $B = \text{"llueva mañana"}$ $C = \text{"llueva pasado mañana"}$

a) Expresa, mediante operaciones con sucesos, las siguientes situaciones:

- 1.- Llueva al menos uno de los tres días
- 2.- Llueva sólo hoy
- 3.- No llueva ninguno de los tres días
- 4.- Llueva hoy o mañana, pero pasado no
- 5.- Llueva exactamente dos días

b) Explica el significado de:

$$(A \cap B) \cap C, (A \cup B), A \cup B \cup C, (B \cap C), (A \cap B \cap C)$$

6.- Se considera el experimento que consiste en el lanzamiento de dos dados del mismo color y del mismo tamaño, es decir, indistinguibles y anotar el resultado de las caras superiores. Se pide:

- a) Espacio muestral.
- b) Suceso "obtener al menos un seis"
- c) Suceso "obtener al menos un múltiplo de dos"
- d) Suceso "Obtener a lo sumo un número impar"
- e) Suceso "La suma de las caras es 7"

7: Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento, que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideramos los siguientes sucesos: $A = \text{"salir un número primo"}$ y $B = \text{"salir un número cuadrado perfecto"}$.

Responde a las cuestiones siguientes:

- a) Calcula los sucesos $A \cap B$ y $A \cup B$
- b) ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?.
- c) Encuentra los sucesos contrarios de A y B .

8.- De una baraja de 49 cartas extraemos una carta. Sean los sucesos: $A = \text{"sacar copas"}$; $B = \text{"sacar as"}$ y $C = \text{"sacar as de oros"}$. Determina los sucesos siguientes:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $B \cap C$
- d) $A \cap B$
- e) $(A \cup B) \cap C$
- f) $B - C$

9.- Siendo $A = \{3,6,9,12\}$ y $B = \{2,3,5,7,11\}$, comprueba que se cumplen las leyes de De Morgan y las propiedades de simplificación.

10.- Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Son compatibles los sucesos $A = \text{"los dos escriben la misma vocal"}$ y $B = \text{"Alfredo escribe una e"}$?

9.- Se lanzan dos dados. Sea $A =$ “la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los dos dados es 2” y $B =$ “obtener, al menos, un 6”. Calcula la probabilidad del suceso $A \cup B$

10.- De dos sucesos A y B se sabe que la probabilidad de que ocurra A es $\frac{3}{8}$, la de que ocurra B es $\frac{1}{2}$, y la de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{4}$. Calcula

$$\begin{array}{lllll} a) P(A \cup B) & b) P(\bar{A}) & c) P(\bar{B}) & d) P(\bar{A} \cap \bar{B}) & e) P(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ f) P(A \cap \bar{B}) & g) P(\bar{B} \cap A) & & & \end{array}$$

11.- Se saca al azar una carta de una baraja española. Calcular la probabilidad de que sea:

- a) Un rey
- b) Una copa
- c) Una figura
- d) Una copa o una figura
- e) Una copa y una figura

12.- Una bolsa contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se saca una bola, se introduce nuevamente y se saca otra bola, obteniendo así un número de dos cifras. Sean los sucesos: $A =$ “obtener un número que empiece por 3” y $B =$ “obtener un número que sea múltiplo de 11”.

Calcula:

- a) Las probabilidades de A y de B
- b) $P(A \cap B)$
- c) ¿Son A y B compatibles?

13.- En una clase hay 15 chicos y 12 chicas. De las chicas, 3 usan gafas y de los chicos, 4 usan gafas. Elegida una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Sea chica
- b) Use gafas
- c) Sea chica y use gafas
- d) Sea chico y no use gafas

14.- Sabiendo que $P(A) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.1$, calcula $P(B)$ y $P(A \cup B)$

15.- En una ciudad el 60 % de los niños son alérgicos al polen, el 50 % a los ácaros y el 20 % son alérgicos a ambas cosas.

- a) Calcula la probabilidad de que, elegido un niño al azar, sea alérgico al polen, a los ácaros o a ambas cosas
- b) En un colegio con 450 niños, ¿cuántos cabe esperar que sean alérgicos al polen o a los ácaros?

16.- Con las cifras 1, 2, 3 y 4 se forman todos los números posibles de cuatro cifras distintas.

Calcula:

- a) La probabilidad de que termine en 1
- b) La probabilidad de que sea un número par

17.- Antonio y Beatriz son los finalistas de un torneo de ajedrez. Gana el torneo quien gane dos partidas seguidas o tres alternativas (suponiendo que no hay tablas). Utiliza un diagrama de árbol para calcular el espacio muestral.

Si ambos tienen las mismas opciones de ganar, ¿Qué probabilidad hay de que el torneo termine a la 3ª partida?