Optimización de funciones

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.
2. Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable, **utilizando el dato o datos aportados en el problema**.
3. Se **despeja** una **variable** de la **ecuación** y se **sustituye** en la **función** de modo que nos quede **una sola variable**.
4. Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.

Ejercicios:

1: En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatroángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.

2: Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible?

3: Un terreno de forma rectangular tiene 400 m^2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el precio de la valla sea mínimo?

4: Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m^2 y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el precio más bajo?

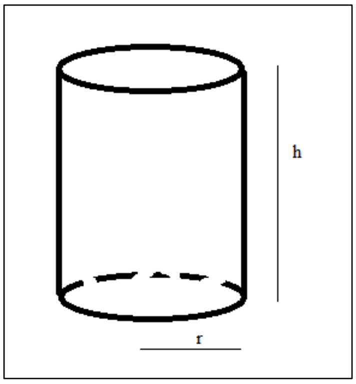
5: Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.

6: *(El Problema del Cable más Corto)* Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas unadistancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

Optimización de funciones.

Una lata de refresco cilíndrica tiene un volumen de 330 cm^3.
a)Halla las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal necesaria para hacerla sea mínima.
b) Halla las dimensiones que debe tener para que el coste de su realización sea mínimo sabiendo que el metal necesario para la cara lateral vale 0'01 €/cm^2 y el de las bases vale 0'02 €/cm^2.
Solución:

a) La lata tendrá dos incógnitas: el radio de la base, r, y la altura, h.



Como el volumen de un cilindro es V= π. r^2.h entonces π. r^2.h=330
La función que se optimiza (en este caso debe ser negativa) es el área total. Esta función será: A= 2.π. r^2+ 2.π.r.h
Para poder derivar esta función debe haber una sola incógnita por lo que despejamos una en la ecaución dada por el dato: $h = \frac{330}{\pi . r^2}$
Sustituimos: A= 2.π. r^2+ 2.π.r.h= A= 2.π. r^2+ 2.π.r. $\frac{330}{\pi . r^2} = 2.(\pi . r^2 + \frac{330}{r})$
Ahora sólo hay una incógnita (pues π es un número) y podemos derivar:

A'=2.(2.π.r- $\frac{330}{r^2}$)=$\frac{4.\pi . r^3 - 660}{r^2}$
Por último igualamos a 0 y resolvemos:

$\frac{4.\pi . r^3 - 660}{r^2} = 0 => 4.\pi . r^3 - 660 = 0$
con lo que $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$ y , sustituyendo, h= $\frac{330}{\pi . \sqrt[3]{\left(\frac{165}{\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4.330}{\pi}}$

b) El inicio es igual por tratarse de la misma lata de refresco: π. r^2.h=330 => $h = \frac{330}{\pi . r^2}$

Pero la función que se optimiza es el precio del metal que se utiliza:

P=2. 2.π. r^2+1. 2.π.r.h (Hemos puesto 2 y 1 porque se trabaja con céntimos para facilitar los cálculos)
Si sustituimos el valor de h obtenido del dato, se obtiene P=4.π. r^2+ 2.π.r. $\frac{330}{\pi . r^2} = 4.\pi . r^2 + \frac{660}{r}$
Ahora podemos derivar: P'= 8.π.r - $\frac{660}{r^2}$
Si igualamos a 0 y resolvemos , resulta que $r = \sqrt[3]{\frac{660}{8.\pi}} = \sqrt[3]{\frac{165}{2.\pi}}$. y h será: h=$\frac{330}{\pi . \sqrt[3]{\left(\frac{165}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{16.330}{\pi}}$