La sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente y está acotada:

Monótona creciente: $a_n < a_{n+1}$

Utilizando el desarrollo del binomio de Newton:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-(n-1)}{n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Aplicando el mismo desarrollo para el término correspondiente a a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Se observa que:

1. Hay un sumando más en a_{n+1}
2. El primer sumando es 2 en ambos desarrollos.
3. Cada uno de los siguientes sumandos de a_{n+1} es mayor que su correspondiente de a_n, pues:

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1}\ ;\ 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1}\ ;\ \ldots$$

Por tanto la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente

La sucesión $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ está acotada:

Del desarrollo anterior se tiene que 2 es una cota inferior. Vamos a ver que 3 es una cota superior.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Como $1-\dfrac{1}{n} < 1,\ 1-\dfrac{2}{n} < 1, \ldots,$ etc.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

Como $2! = 2$; $3! > 2^2$; $4! > 2^3$; $\ldots n! > 2^{n-1}$ resulta: $\dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3!} < \dfrac{1}{2^2}$; $\dfrac{1}{4!} < \dfrac{1}{2^3}$; $\cdots$; $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{progresión geométrica de razón } 1/2} = 2 + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Por tanto, la sucesión está acotada:

$$2 < a_n < 3$$

Su límite es un número irracional al que se llama e≅2,7182818284...

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$