BLOQUE I:
ÁLGEBRA

MATRICES

1. Concepto de matriz

Una matriz es un conjunto de elementos ordenados en filas y columnas.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -8 & 5 \\ -2 & \frac{3}{5} & \sqrt{7} & 81 \end{pmatrix}$$

A es una matriz que consta de 3 filas y cuatro columnas; es de orden 3X4: $A_{(3\times4)}$

Definición. Una matriz real de orden o dimensión *nxm* es un conjunto de $n\times m$ números reales ordenados en n filas y m columnas encerradas entre paréntesis que representamos por $A=(a_{ij}),\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m$

$$A_{(n\times m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2. Tipos de matrices

Matriz opuesta de A: es aquella que obtenemos cambiando el signo de todos los elementos de A, y la representamos por -A.

Matriz transpuesta de A: es la que obtenemos cambiando en A las filas por las columnas y la representamos por A^t; si la matriz A es de orden $n \times m$, A^t será de orden $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Si nos fijamos en el orden o la dimensión de una matriz, definimos:

Matriz fila: es aquella cuyo orden o dimensión es *1 x n*, es decir la que tiene una única fila.

$$A_{(1\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Matriz columna: es la que tiene orden o dimensión *n x1*, es decir la que tiene una única columna.

$$A_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada: es la que tiene orden o dimensión *n x n* , es decir, la que tiene el mismo número de filas que de columnas. En este caso se dice que la matriz es de orden *n*.

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si nos fijamos en los elementos de la matriz, definimos:

Matriz nula es la que tiene todos sus elementos iguales a cero.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{(3\times 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matrices cuadradas

Las matrices cuadradas constituyen un subconjunto importante dentro del conjunto de las matrices, y por eso existen definiciones propias de este subconjunto.

Si nos fijamos en sus elementos, definimos:

Diagonal principal: Es la formada por los elementos de la matriz cuadrada $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

$$A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria: Es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$

$$A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.1. Tipos de matrices cuadradas:

Triangular superior: si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son cero:

$$a_{ij} = 0 \; ; \; i < j$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_n = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Triangular inferior: si todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son cero:

$$a_{ij} = 0 \; ; \; i > j$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_n \begin{pmatrix} & 0 \\ \diagdown & \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: si todos los elementos que no están en la diagonal principal son ceros.

$$a_{ij} = 0 \; ; \; i \neq j$$

$$A_n \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica si los elementos simétricos respecto a la diagonal principal son iguales, esto es, si la matriz transpuesta coincide con la matriz dada: $A^t = A$.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica o hemisimétrica: si los elementos de la diagonal principal son todos nulos y sus elementos simétricos respecto de dicha diagonal son opuestos; es decir si la matriz transpuesta coincide con la opuesta de la matriz dada: $A^t = -A$

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad: si todos sus elementos son cero excepto los de la diagonal principal que son 1.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Operaciones con matrices

4.1. Suma de matrices. Propiedades.

Para poder efectuar la suma de dos o más matrices, éstas tienen que ser del mismo orden.

Si A y B son dos matrices del mismo orden, entonces la matriz suma es otra matriz del mismo orden que se obtiene sumando los términos que ocupan el mismo lugar en cada una de las matrices dadas.

$$A_{(n\times m)}+B_{(n\times m)}=(A+B)_{(n\times m)}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Asociativa: A+(B+C) = (A+B) +C

$$\left(a_{ij}\right)+\left[\left(b_{ij}\right)+\left(c_{ij}\right)\right]=\left(a_{ij}\right)+\left[\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]=\left[a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]=$$

={en virtud de la propiedad asociativa de la suma de números reales}=

$$=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+\left(c_{ij}\right)\right]=\left[\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)\right]+\left(c_{ij}\right)$$

Conmutativa: A+B = B+A

$$\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)=\left(b_{ij}+a_{ij}\right)=\left(b_{ij}\right)+\left(a_{ij}\right)$$

Elemento neutro: A+(0) = (0)+A = A

$$(0)+\left(a_{ij}\right)=\left(a_{ij}\right)+(0)=\left(a_{ij}\right)$$

Elemento simétrico u opuesto: La matriz opuesta; A+(- A) =(0)

$$\left(a_{ij}\right)+\left(-a_{ij}\right)=\left(a_{ij}-a_{ij}\right)=(0)$$

DETERMINANTES

Un determinante es un número asociado a una matriz cuadrada.

1. Determinantes de segundo y tercer orden.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

se llama determinante de A, det(A) al número real :

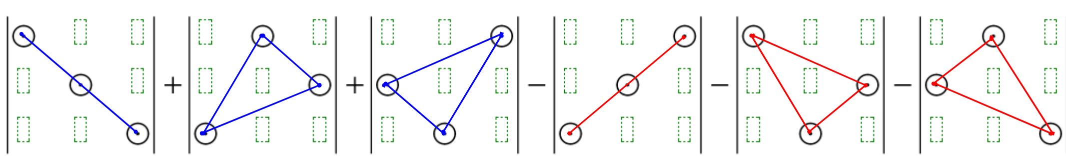
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

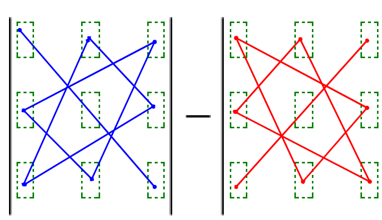
Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

se llama determinante de A, det(A), al número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Para acordarse de esta expresión se utiliza la **regla de Sarrus**:





2. Cálculo del determinante de una matriz de cualquier orden: Desarrollo por menores.

Adjunto de un elemento de una matriz:

Se llama adjunto del elemento a_{ij} de la matriz cuadrada A, y se repreenta por A_{ij}, al determinante de la submatriz cuadrada que se obtiene al eliminar de la matriz A la fila **i** y la columna **j (menor complementario de la matriz A)**. Además el signo de dicho determinante debe ser modificado de acuerdo con la siguiente regla:

- si i+j es par no se cambia el signo.
- si i+j es impar se cambia de signo.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_{22}}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad ; \boxed{A_{23}}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

El determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden es igual a la suma de los elementos de una de sus lineas multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}$$

$$|A| = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. Propiedades de los determinantes

P1. Si una de las líneas de la matriz (fila o columna) está formada por ceros, entonces el valor del determinante es cero.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

P2. Si la matriz tiene dos líneas iguales o proporcionales, el valor del determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \qquad = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \qquad = 0$$

P3. Si la matriz tiene una línea que es combinación lineal de otras líneas, el valor del determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \qquad = 0$$

$$C_3 = 2C_1 - C_2$$

P4. Si en una matriz se permutan dos de sus líneas, el valor del determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \qquad = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \qquad = -7$$

P5. Si se multiplican todos los elementos de una línea de una matriz por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 3\cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3\cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 3\cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3\cdot a_{12}\cdot A_{12} + 3\cdot a_{22}\cdot A_{22} + 3\cdot a_{32}\cdot A_{32} = 3\cdot\left(a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32}\right) = 3\cdot|A|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \qquad = -24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \qquad = -24$$

P6. El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

P7. El determinante del producto de dos matrices cuadradas coincide con el producto de sus determinantes.

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B| = |B|\cdot|A| = |B\cdot A|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix};\ |A| = -4\ ;\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ |B| = 5$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix};\ |A\cdot B| = -20$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix};\ |B\cdot A| = -20$$

P8. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

P9. El determinante de la matriz inversa es el inverso del determinante de dicha matriz.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A \cdot A^{-1}| = |I_n| = 1;\ |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

P10. La suma de los determinantes de dos matrices que tienen iguales todos sus elementos excepto los de una línea es igual al determinante formado por todos los elementos iguales y sustituyendo la línea desigual por la suma de los correspondientes a las matrices iniciales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 3 + 11 = 14$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Contenidos:

1. Definición de sistema lineal. Clasificación de los sistemas. Notación matricial.
2. Sistemas equivalentes.
3. Resolución de sistemas:
   - Método de Gauss.
   - Regla de Cramer.
4. Discusión de sistemas. Método de Gauss. Teorema de Rouchè-Fröbenius.
5. Sistemas homogéneos.

1.1. Definición de sistema de lineal.

Definición 1: Se llama **ecuación lineal o de primer grado** a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

En esta ecuación se distinguen los siguientes elementos:

Incógnitas de la ecuación, que son los términos variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$**.** En cada ecuación, las incógnitas pueden tomar cualquier valor real.

Coeficientes de las incógnitas, que son los números reales $a_1, a_2, \ldots a_n$ En cada ecuación, los coeficientes son números reales fijos.

Término independiente es el número real b y en cada ecuación es un número fijo.

Solución de la ecuación son los valores $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ de las incógnitas que **transforman la igualdad en una identidad numérica.**

Discutir una ecuación es averiguar si tiene o no soluciones.

Resolver una ecuación es encontrar las soluciones de la ecuación.

Definición 2: Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** al conjunto formado por m ecuaciones lineales con las mismas incógnitas cada una de ellas; será por tanto, un conjunto de la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Coeficientes del sistema son los números reales a_{ij}.

Términos independientes son los números reales b_j.

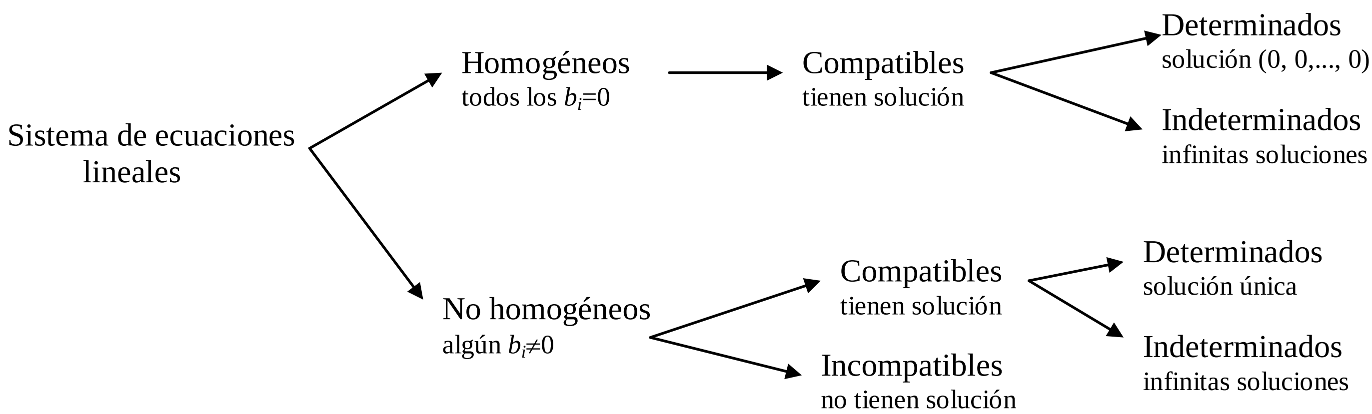
Solución de un sistema son los valores $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ de las incógnitas que transforman **todas las igualdades del sistema en identidades numéricas: es una solución común a todas las ecuaciones.**

Discutir un sistema es averiguar si el sistema tiene o no soluciones y cuántas son.

Resolver un sistema es encontrar las soluciones del sistema.

1.2. Clasificación de los sistemas.

Los sistemas se clasifican en relación con su solución:
Se llama **sistema compatible** al sistema que admite, al menos, **una solución.** Si la solución es única, el sistema se llama **determinado,** y si admite infinitas soluciones, el sistema se llama **indeterminado.**
Se llama **sistema incompatible** al sistema que no admite solución.
En relación con los términos independientes, los sistemas pueden ser homogéneos o no homogéneos.
Se llama **sistema homogéneo** al sistema cuyos **términos independientes son nulos**. Los sistemas homogéneos siempre admiten la solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, que se denomina solución impropia. Si sólo admite esta solución, el sistema es **determinado;** en caso contrario, el sistema es **indeterminado** y admite infinitas soluciones.
Esquemáticamente:



1.3. Notación matricial

Con el fin de simplificar la escritura de un sistema utilizamos los conocimientos adquiridos sobre matrices, tal como se indica a continuación:
Consideremos el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definimos las siguientes matrices que van a intervenir en la expresión reducida de los sistemas de ecuaciones lineales:
Matriz de los coeficientes es la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas. Es la matriz C de dimensión *m*%*n*:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ **=matriz de los coeficientes.**

Matriz ampliada es la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas, ampliada con una columna formada con los términos independientes. Es la matriz A de dimensión $m \times (n+1)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ **=matriz ampliada.**

Matriz de las incógnitas es la matriz formada por las incógnitas. Es la matriz columna X de dimensión n%1: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Matriz de los términos independientes es la matriz formada con los términos independientes. Es una matriz columna B de dimensión m%1: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$

El sistema en forma matricial se escribe así: $C \cdot X = B$**,** o bien,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. Sistemas equivalentes

Definición: Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** cuando **tienen las mismas soluciones**, es decir, cuando toda solución del primero es solución del segundo y viceversa.

Para obtener sistemas equivalentes a uno dado, se pueden efectuar las siguientes transformaciones:

- Multiplicar una ecuación del sistema por un número no nulo, lo que equivale a multiplicar todos los elementos de la fila correspondiente de la matriz ampliada del sistema por dicho número.
- Cambiar el orden de las ecuaciones; esto supone cambiar el orden de las filas correspondientes de la matriz ampliada.
- Añadir o suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás ecuaciones; es decir, suprimir una fila en la matriz ampliada que sea combinación lineal de las demás.
- Sumar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número distinto de cero. Según esto, podremos sumar a una fila de la matriz ampliada otra fila multiplicada por un número no nulo.
- Despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en las demás.

Teorema fundamental de equivalencia:

Si en un sistema de ecuaciones lineales se sustituye la ecuación i-ésima por una combinación lineal de dicha ecuación y las demás ecuaciones del sistema, siempre que el coeficiente que multiplique a la ecuación i-ésima sea distinto de cero, el sistema resultante es equivalente al primero.

Ejemplo: Son equivalentes los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ 2x-y+z=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \overset{2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \overset{3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ z=2 \\ y=3 \end{cases}$$

En 1 se sustituye la primera ecuación por la que resulta de sumar las dos primeras multiplicadas por 1/3.
En 2 se sustituye la segunda ecuación por la suma de las tres, multiplicadas la primera y la tercera por 1 y la segunda por -1.
En 3 se sustituye la tercera ecuación por la suma de las tres, multiplicadas la primera por 1, la segunda por 2 y la tercera por -1.
Por ser todos los sistemas equivalentes, resulta que las soluciones del sistema propuesto son (1, 3, 2).

3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.1. Método de Gauss.

El método de Gauss se basa en el teorema fundamental de equivalencia de sistemas y consiste en ir escalonando la matriz ampliada mediante combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema, hasta conseguir *"una matriz escalonada por filas"*. De este modo se obtiene un sistema escalonado equivalente al original cuya discusión y resolución es más sencilla.

Ejemplo: Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 5x-y+2z=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} -y+z=2 \\ x+2y+4z=3 \\ 2x+4y+8z=1 \end{cases}$$

3.2. Regla de Cramer.

Definición: Se llama **sistema de Cramer** a un sistema de ecuaciones lineales que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, **m=n**, y además la matriz de los coeficientes es regular, es decir su determinante es distinto de cero.

$$\text{Sistema de Cramer} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{m}=\mathrm{n} \\ |\mathrm{C}| \neq 0 \end{cases}$$

Teorema (Regla de Cramer):
Los sistemas de Cramer son compatibles y determinados y su solución única se obtiene dividiendo por el determinante de la matriz de coeficientes el determinante de la matriz que resulta de sustituir, en la matriz de los coeficientes, la columna que corresponde a los coeficientes de la incógnita que se despeja por la que forman los términos independientes.

Ejemplo: Resolver aplicando la Regla de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ -x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y+3z=-1 \\ -2x+3y+2z=-4 \end{cases}$$

4. Discusión de sistemas de ecuaciones lineales.

Discutir un sistema consiste en estudiar si es compatible o incompatible y. en el primer caso, si es determinado o indeterminado. Para realizar este estudio nos basamos en el método de Gauss y en el teorema de Rouchè-Fröbenius.

4.1. Discusión de sistemas por el método de Gauss.

Sea un sistema de ecuaciones lineales y sea A la matriz ampliada del sistema.

- Si al reducir A a la forma triangular aparece alguna fila en la que son nulos todos los elementos, excepto el correspondiente al término independiente, entonces el sistema es **incompatible**.
- En caso contrario, el sistema es **compatible** y se distinguen dos casos:
  - si el número de filas no nulas en la matriz triangular coincide con el número de incógnitas, el sistema es **determinado.**
  - si el número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas, el sistema es **indeterminado.**

Ejemplo: Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7 \\ 3x-6y=3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x+2y-3z=1 \\ 6y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$$

4.2. Teorema de Rouchè-Fröbenius.

Teorema de Rouchè-Fröbenius.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada:

El sistema lineal es compatible ω rg(C)=rg(A).

♦ **Método para estudiar y discutir un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas.**

Si el sistema es compatible, rg(C)=rg(A)=h, elegimos como menor principal el formado por las h primeras ecuaciones e incógnitas. Si este menor no es principal, alteramos el orden de las ecuaciones y el de las incógnitas hasta lograr que el menor formado por las h primeras ecuaciones y las h primeras incógnitas sea principal.

Se llaman **ecuaciones principales** a las h ecuaciones elegidas.

Se llaman **incógnitas principales** a las h incógnitas elegidas.

Al ser las ecuaciones no principales combinación lineal de las ecuaciones principales, el sistema inicial es equivalente al siguiente de Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1h}x_h = b_1 - a_{1,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2h}x_h = b_2 - a_{2,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \ldots + a_{hh}x = b_h - a_{h,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{hn}x_n \end{cases}$$

Si h coincide con el número de incógnitas, **h=n**, el sistema es compatible y tiene una **única solución**, que se obtiene aplicando la regla de Cramer.

Si **h!n**, el sistema es compatible pero **indeterminado**, las incógnitas principales dependen de los valores asignados a las n-h incógnitas no principales, y se calculan las infinitas soluciones aplicando la regla de Cramer.

Resumiendo:

$$\begin{cases} \text{rg(C)} \neq \text{rg(A)} \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \\ \text{rg(C)} = \text{rg(A)} = \text{h} \Rightarrow \text{Sistema compatible} \begin{cases} \text{h} = \text{n} \ \ \text{Determinado} \\ \text{h} < \text{n} \ \ \text{Indeterminado} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo: Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{cases} ; \begin{cases} 2x+y-2z=2 \\ x-2y+z=3 \\ x+3y+z=6 \end{cases}$$

5. Sistemas homogéneos.

Los sistemas homogéneos son un caso particular de los sistemas que acabamos de estudiar. Por todo ello, podemos aplicar el teorema de Rouchè-Fröbenius para discutirlos y la regla de Cramer para resolverlos.

Definición: Se llama **sistema homogéneo** a un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes son todos nulos.

Características de los sistemas homogéneos:

1. **Los sistemas homogéneos son siempre compatibles**, ya que la última columna de la matriz ampliada tiene todos los elementos nulos, luego rg(C)=rg(A).

2. Un sistema homogéneo siempre tiene la solución (0, 0, ..., 0), denominada **solución impropia** o *trivial*.

3. Si un sistema homogéneo admite otras soluciones, por ejemplo

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n,$$

denominadas **soluciones propias**, también son soluciones

$$x_1 = \lambda\alpha_1, x_2 = \lambda\alpha_2, \ldots, x_n = \lambda\alpha_n$$

lo que justifica el nombre de homogéneo, luego los sistemas homogéneos admiten infinitas soluciones propias o carecen de ellas.

5.1. Discusión de un sistema homogéneo.

La discusión de los sistemas homogéneos es como sigue:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo admita soluciones distintas de la impropia es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas.

Ejemplo: Discutir y resolver los siguientes sistemas homogéneos:

$$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ 4x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} ; \begin{cases} x+5y-4z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$$

<u>Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss</u>

1. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Sea el sistema: $\begin{cases} Ax+By=C \\ A'x+B'y=C' \end{cases}$

Casos que se pueden presentar:

$a)\ \dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado (S.C.D)

La solución es única. (Son dos rectas que se cortan en un punto)

$b)\ \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'} \Rightarrow$ Sistema incompatible (S.I.)

El sistema no tiene solución. (Son dos rectas paralelas).

$c)\ \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (S.C.I). La solución depende de un parámetro.

El sistema tiene infinitas soluciones. (Son rectas coincidentes).

2. Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Sea el sistema $\begin{cases} Ax+By+Cz=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \\ A''x+B''y+C''z=D'' \end{cases}$

Casos que se pueden presentar, después de hacer las transformaciones, aplicando el método de Gauss, para obtener un sistema equivalente al inicial, pero más fácil de resolver:

$a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ 0 & B''' & C''' & D''' \\ 0 & 0 & C^{IV} & D^{IV} \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible determinado (S.C.D).

El sistema tiene una solución única. (Los planos se cortan en un punto).

$b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ 0 & B''' & C''' & D''' \\ 0 & 0 & 0 & D^{IV} \neq 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

El sistema no tiene solución. (Los planos se cortan dos a dos o bien dos son paralelos y el otro los corta)

$c)\ \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ 0 & B''' & C''' & D''' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (S.C.I) dependiente de un parámetro.

El sistema tiene infinitas soluciones. (Los planos se cortan en una recta).

$d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (S.C.I), dependiente de dos parámetros.

El sistema tiene infinitas soluciones. (Son planos coincidentes).

PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal consiste en optimizar una función lineal, llamada **función objetivo**, que está sometida a una serie de condiciones, llamadas **restricciones**, que se expresan mediante inecuaciones o ecuaciones lineales.

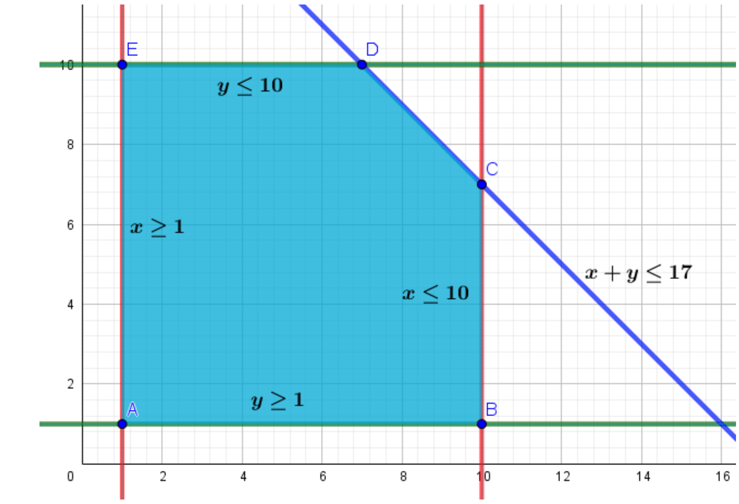
Proceso para la resolución de un problema de programación lineal:

1. Planteamiento de la función objetivo y sus restricciones.
2. Representación gráfica de las restricciones.
3. Región factible: Conjunto de puntos que cumplen todas y cada una de las restricciones. Esta puede ser **acotada** (polígono) o no **acotada** (línea poligonal).
4. Búsqueda de la solución óptima.
   Si la región factible es acotada, el problema tiene al menos una solución óptima. (Si es no acotada puede no tener solución).
   a) **Solución óptima única**: Se halla en uno de los vértices de la región factible.
   b) **Infinitas soluciones óptimas:** Se hallan en un lado de la región factible (segmento limitado por dos vértices consecutivos de la región factible).
5. Cálculo de la solución óptima:
   Para hallar la solución óptima se puede gráficamente o analíticamente.
   Para obtener la solución analíticamente, se sustituyen los vértices obtenidos en la región factible en la función objetivo, y aquellos valores que cumplan las condiciones serán los puntos óptimos.
   Para obtener la solución gráficamente se representa en los mismos ejes en los que se ha representado la región factible las líneas de nivel, es decir rectas paralelas a la función objetivo y aquella recta que delimite toda la región factible indicará el punto o puntos solución.

Tipos de problemas de Programación Lineal:

A) Problemas de producción.
   Este tipo de problemas consisten en maximizar beneficios o minimizar costes.
   Ejemplo: (problema 65, página 108).
   Una refinería produce gasolina sin plomo y gasoil en las siguientes condiciones: no puede producir más de una tonelada ni menos de 100 kg de cada producto. Los precios de venta son de 0.8 unidades monetarias (u.m.) para cada kg de gasolina y de 0.85 para cada kg de gasoil. Se produce como máximo un total de 1700 kg entre los dos productos. ¿Cuál es la producción que maximiza los ingresos?
   Solución.
   Planteamos la función objetivo y las restricciones:
   $x \equiv kg$ de gasolina sin plomo; $y \equiv kg$ de gasoil
   $$Máx\, z = f(x,y) = 0.8x + 0.85y$$
   Restricciones:
   $$\begin{cases} 100 \le x \le 1000 \\ 100 \le y \le 1000 \\ x + y \le 1700 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{cases}$$
   Representamos gráficamente el conjunto de restricciones: (para facilitar la representación se utiliza la escala que, en cada caso, se considera más conveniente)
   Si expresamos la cantidad de producción en **centenas**, nuestro conjunto de restricciones tomaría los siguientes valores:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 10 \\ x + y \leq 17 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{cases}$$ y su gráfica es:



(en la mayor parte de los casos, la gráfica se limita al primer cuadrante).

En este caso la región factible es un pentágono cuyos vértices son A(1;1), B(10;1), C(c_1;c_2), D(d_1;d_2) y E(1;10) Para determinar las coordenadas de los puntos C y D hay que resolver los sistemas de ecuaciones lineales:

$$C = \begin{cases} x = 10 \\ x + y = 17 \end{cases} \Rightarrow (c_1; c_2) = (10;7) \quad D = \begin{cases} y = 10 \\ x + y = 17 \end{cases} \Rightarrow (d_1; d_2) = (7;10)$$

Resolución analítica:

Introducimos los puntos en la función objetivo, y el punto que haga máximo el beneficio será la solución del problema:

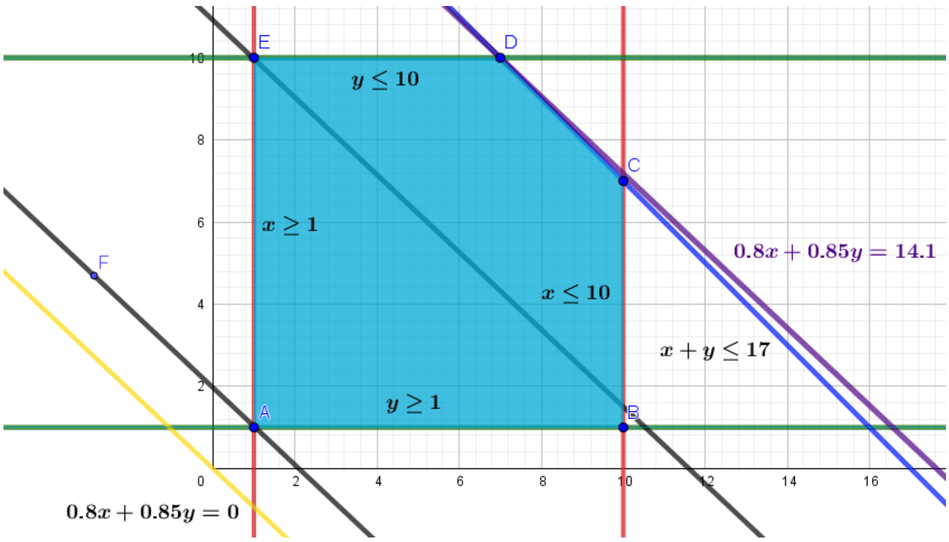
$$f(A) = 100 \cdot (0.8 \cdot 1 + 0.85 \cdot 1) = 165 \; u.m. \qquad f(B) = 100 \cdot (0.8 \cdot 1 + 0.85 \cdot 10) = 930 \; u.m.$$

$$f(C) = 100(0.8 \cdot 10 + 0.85 \cdot 7) = 1395 \; u.m. \qquad f(D) = 100 \cdot (0.8 \cdot 7 + 0.85 \cdot 10) = 1410 \, u.m.$$

Observamos que en este caso el máximo beneficio se produce en el punto D. Por tanto, la producción que maximiza los ingresos es 700 kg de gasolina y 1000 kg de gasoil

Resolución gráfica:

Representamos sobre el gráfico anterior las “rectas de nivel” correspondientes a la función objetivo, es decir rectas paralelas a $0.8 \cdot x + 0.85 \cdot y = k \; ; \; k \in \mathbb{R}$



Se observa que toda la región factible queda por debajo de la recta $0.8 \cdot x + 0.85 \cdot y = 14.1$. , que pasa por el punto D. Luego el óptimo se alcanza en el punto D.

B) Problema de la dieta.

Se desea saber qué alimentos y en qué cantidades se deben incluir en la alimentación de modo que el coste sea mínimo y se satisfagan las necesidades mínimas nutricionales.

Ejemplo: (problema 60, página 108)

En una granja hay un total de 9000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos tipos de productos, A y B, que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase A contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase de B contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Sabiendo que cada envase de A cuesta 0.24€ y que cada envase de B cuesta 0.2€, determina, justificando la respuesta:

a) El número de envases de cada tipo que deben adquirir en la granja con objeto de que el coste sea mínimo y se cubran las necesidades de consumo mensuales de todos los conejos.

b) El valor de dicho coste mensual.

Solución.

Planteamos la función objetivo y las restricciones que se deben cumplir para alimentar a un conejo:

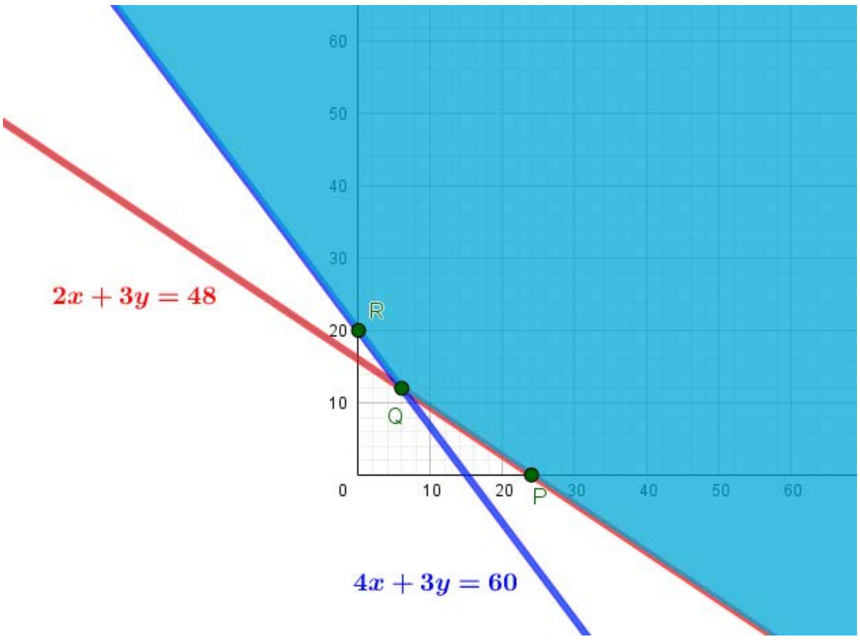
$x \equiv \text{producto A}\ ;\ \ y \equiv \text{producto B}$

$\text{mín}\ z = f\left(x, y\right) = 0.24x + 0.2y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$$

Representamos gráficamente las restricciones:



Observamos que, en este caso, la región factible es ilimitada. Si tiene solución, esta se encontrará en los vértices P(24;0), Q(q_1,q_2) o R(0,20). Para hallar las coordenadas del punto Q procedemos como en el caso anterior. Se trata de resolver el sistema de ecuaciones lineales formado por las rectas que se cortan en ese punto $Q=\begin{cases}2x+3y=48\\4x+3y=60\end{cases}\Rightarrow Q=(6;12)$

Aplicando la resolución analítica, introducimos los puntos en la función objetivo:

$f(P)=0.24\cdot 24+0.2\cdot 0=5.76€$; $f(Q)=0.24\cdot 6+0.2\cdot 12=3.84€$

$f(R)=0.24\cdot 0+0.2\cdot 20=4€$.

Por tanto, para que el coste sea mínimo y se cubran las necesidades de todos los conejos, se deben comprar 6·9000=54000 envases de A y 12·9000=108000 de B.
El coste mínimo será 3.84·9000=34560€.

C) Problema del transporte.

Consiste en optimizar el transporte de una mercancía desde diferentes puntos de origen (oferta) a diferentes puntos de destino (demanda), con diferentes costes asociados según el origen y el destino de la misma.
Ejemplo: (78 página 110)
En cierta zona de una comunidad autónoma hay tres fábricas de televisores, O_1, O_2 y O_3, que proveen de aparatos a dos ciudades D_1 y D_2.
Las producciones de las fábricas y las demandas de las ciudades son, respectivamente:

O_1	O_2	O_3		D_1	D_2
100	150	225		175	300

Los costes de transporte, en euros, de cada unidad desde un punto de origen a uno de destino son:

	D_1	D_2
O_1	10	8
O_2	6	5
O_3	4	5

Halla cuántos televisores deben llevarse desde cada fábrica a cada ciudad para que el coste total de los gastos de transporte sea mínimo. Calcula dicho coste mínimo.

Solución:
Para resolver el problema de transporte primero creamos la tabla que relaciona los valores de oferta, demanda y coste: De este modo obtendremos la función objetivo y las restricciones:

	D_1	D_2	Total
O_1	10 x	8 100−x	100
O_2	6 y	5 150−y	150
O_3	4 175−x−y	5 x+y+50	225
Total	175	300	475

Interpretación de la tabla: Si del primer origen se llevan x televisores al primer destino, al segundo destino ya solo se podrán llevar 100−x. Si del segundo destino se llevan y televisores al primer destino al segundo ya sólo se podrán llevar 150−y. Por último, si el primer destino ya ha recibido x+y televisores de los dos primeros distribuidores, el tercer distribuidor sólo le podrá enviar 175−(x+y); y al segundo destinatario le podrá enviar 225−(175−x−y)=x+y+50.
(Si la tabla está bien hecha, los totales finales deben coincidir).
A partir de esta tabla ya se puede plantear la función objetivo y las restricciones:
La función objetivo, en este caso, consiste en hallar la función que minimiza el coste. Esta función depende de lo que cuesta transportar cada unidad de cada origen a cada destino. Por tanto:

$$\min\ z = f(x,y) = 10x + 6y + 4(175 - x - y) + 8(100 - x) + 5(150 - y) + 5(x + y + 50) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\ z = f(x,y) = 3x + 2y + 2500$$

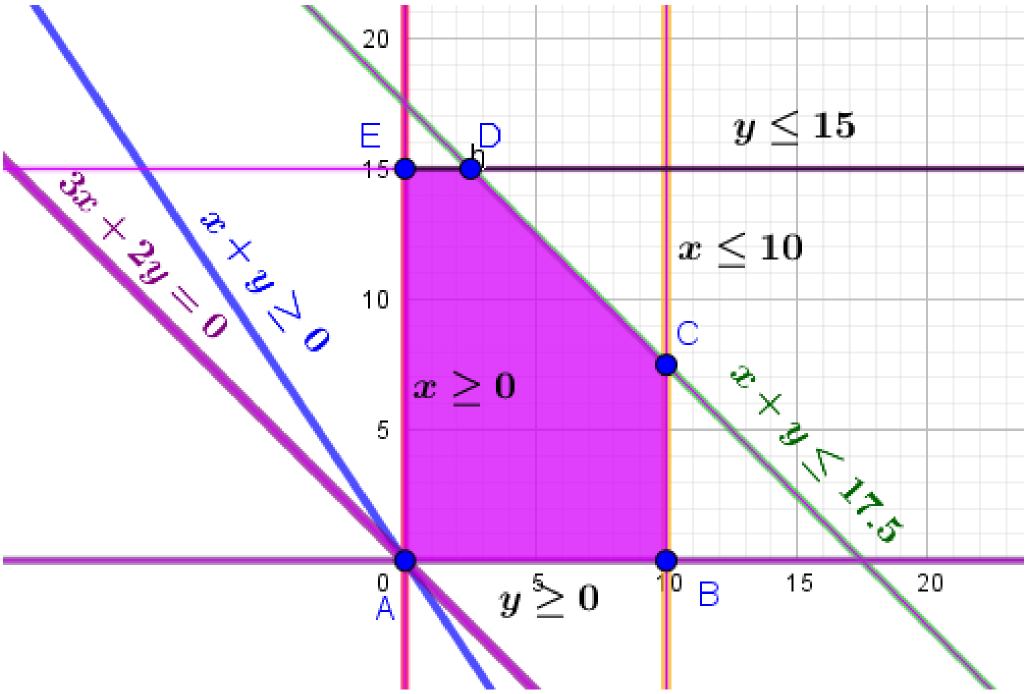
Restricciones: (todos los valores que aparecen dentro de la tabla tienen que ser positivos).

$$\begin{cases} x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \\ 100 - x \geq 0 \\ 150 - y \geq 0 \\ 175 - x - y \geq 0 \\ x + y + 50 \geq 0 \to x + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 150 \\ 0 \leq x + y \leq 175 \end{cases}$$

(La ecuación $x + y + 50 \geq 0$ es redundante, pues no aporta información al sistema).

Una vez que ya tenemos la función objetivo y las restricciones se procede como en los dos problemas anteriores:

Para la representación gráfica, operamos con **decenas**:



Vemos que la región factible es un pentágono formado por los puntos A(0;0), B(10,0, C(10;7.5) D(2.5;15) y E(0;15). Y que la recta 3x+2y=0 queda por debajo de la región factible, luego el mínimo coste se obtiene en el punto A(0;0).

También se puede comprobar analíticamente sin más que calcular la función objetivo en cada uno de los puntos.

Puesto que el coste mínimo se obtiene para (x;y)=(0;0) la distribución habría que hacerla de acuerdo a la siguiente tabla:

	D_1	D_2	Total
O_1	10 0	8 100	100
O_2	6 0	5 150	150
O_3	4 175	5 50	225
Total	175	300	475

Y el precio del transporte sería $f(A) = 2500€$

BLOQUE II:
ANÁLISIS

Propiedades de las potencias:

Un número elevado a cero es 1: $a^0 = 1$
Un número elevado a 1 es el propio número: $a^1 = a$
Un número elevado a -1 es el inverso de dicho número: $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
Producto de potencias de igual base: Se escribe la misma base y se suman los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Cociente de potencias de igual base: Se escribe la misma base y se restan los exponentes: $a^m : a^n = a^{m-n}$
Potencia de una potencia. Se escribe la misma base y se multiplican los exponentes: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
Potencia de exponente negativo: Es la potencia del inverso de la base. $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$
Producto de potencias de igual exponente: Se multiplican las bases y se deja el mismo exponente: $a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$

Cociente de potencias de igual exponente: Se dividen las bases y se deja el mismo exponente: $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Propiedades de los radicales

Un radical es una potencia cuyo exponente es un número fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Radicales equivalentes: Si se multiplica por un mismo número el índice de la raíz y el exponente del radicando, el radical no varía**:** $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}$

Potencia de un radical: Es una raíz del mismo índice y de exponente del radicando el exponente del radical: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Producto de radicales del mismo índice: Se multiplican los radicandos y se escribe el mismo índice para la raíz: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

Cociente de radicales del mismo índice: Se dividen los radicandos y se escribe el mismo índice para la raíz: $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$

Radical de un radical: Se multiplican los índices y se escribe el mismo radicando: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Propiedades de los logaritmos

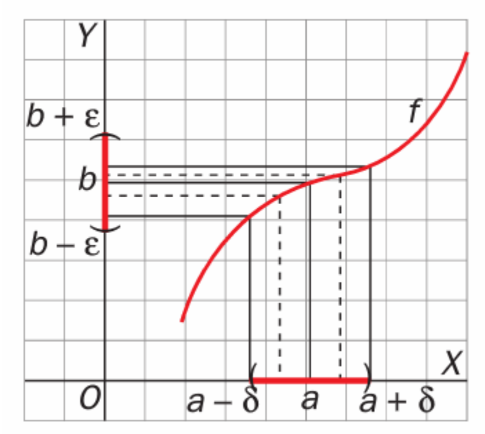
Definición de logaritmo: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \; ; \quad a, x \in \mathbb{R}^+, \; a \neq 1$

1. **El logaritmo de la unidad en cualquier base es 0:** $\log_a 1 = 0$
2. **El logaritmo de un número en su base es la unidad:** $\log_a a = 1$
3. **El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores:** $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. **El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia del logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:** $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_b y$
5. **El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de su base:** $\log_a \left(x^y \right) = y \log_a x$
6. **Cambio de base. El logaritmo de un número en una base se puede expresar en cualquier otra base:** $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

   También se puede afirmar: $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = b$ quiere decir que si $x_0 \in (a-x, a+x)_{x\neq a}$ entonces $f(x_0) \in (b - f(x), b + f(x))$



Propiedades

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, entonces:

$a)$ $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = b \pm c$

$b)$ $\lim_{x\to a}\left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot b$

$c)$ $\lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = b \cdot c$ $\qquad a, b, c, k \in \mathbb{R}$

$d)$ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$

$e)$ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} = b^c$

Operaciones con expresiones infinitas

$$Suma\ (k \in \mathbb{R})$$

$$k \pm \infty = \pm\infty\ ;\ +\infty + \infty = +\infty\ ;\ -\infty - \infty = -\infty$$

$$Producto$$

$$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty\ ;\ (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty$$

$$Si\ \ k > 0 \Rightarrow k\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$$

$$Si\ \ k < 0 \Rightarrow k\cdot(\pm\infty) = \mp\infty$$

$$Cociente$$

$$\frac{k}{\infty} = 0\ ;\ \ Si\ \ k > 0 \Rightarrow \frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty\ ;\ Si\ \ k < 0 \Rightarrow \frac{\pm\infty}{k} = \mp\infty$$

$$Potencia$$

$$k > 0 \Rightarrow \infty^k = \infty\ ;\ \ k < 0 \Rightarrow \infty^k = 0$$

$$0 < k < 1 \Rightarrow k^{+\infty} = 0\ ;\ k^{-\infty} = +\infty$$

$$k > 1 \Rightarrow k^{+\infty} = +\infty\ ;\ \ k^{-\infty} = 0$$

Límite en el infinito de un polinomio

El valor del límite en el infinito de un polinomio queda determinado por el monomio de mayor grado de dicho polinomio.

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)\right] = a_n\cdot\infty\begin{cases} =\infty\ si\ a_n>0 \\ =-\infty\ si\ a_n<0\end{cases}$$

($Observación$: ∞ puede ser positivo o negativo; -∞ expresa el opuesto de ∞)

Cálculo de límites: Indeterminaciones

Tipo $\frac{k}{0}$, $k \in \mathbb{R}$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{k}{0} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0} \Rightarrow$ Se calculan los límites laterales.

Tipo $\frac{0}{0}$

Si $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow (x-a)$ es un divisor de $\mathrm{P}(x)$ y de $\mathrm{Q}(x)$.

Se factorizan $\mathrm{P}(x)$ y $\mathrm{Q}(x)$ en $(x-a)$

Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Si $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ Se divide numerador y denominador por la parte literal del monomio de mayor grado.

Casos: si $gr(P) > gr(Q) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

si $gr(P) = gr(Q) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ donde a_n y b_n son los coeficientes principales de $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente.

si $gr(P) < gr(Q) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Tipo ∞-∞

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\infty-\infty\Rightarrow\begin{cases}\text{Se efectúa la operación antes de calcular el límite.}\\ \text{Si hay raíces se multiplica y divide por la expresión conjugada.}\end{cases}$$

Tipo 0·∞

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}\text{Se efectúa la operación antes de calcular el límite.}\\ \text{En muchos casos se transforma en los del tipo } \dfrac{0}{0} \text{ o } \dfrac{\infty}{\infty}\end{cases}$$

Tipos 0^0 ; ∞^0

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=0^0\\ \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\infty^0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Se toman logaritmos.}$$

Tipo 1^∞

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=1^\infty\Rightarrow\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}\left[f(x)-1\right]\cdot g(x)}$$

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Continuidad de una función real de variable real en un punto x=a

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $x=a$ sii

i) $\exists f(a)$

ii) $\exists \lim_{x\to a} f(x)$

iii) $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

2. Continuidad de una función real de variable real en un intervalo [a,b]

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ si y sólo si lo es para cada $x\in[a,b]$

3. Continuidad de funciones elementales:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en $\mathbb{R}$.

La función $f(x)=P(x)$ es continua en todo punto de la recta real.

La función $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en $x\in\mathbb{R}$ tal que $Q(x)\neq 0$.

La función $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$ es continua en $x\in\mathbb{R}$ si n es impar y sólo en aquellos que verifican $P(x)\geq 0$ si n es par.

La función $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.

La función $f(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ es continua para $x>0$.

Las funciones $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$,son continuas en todo punto de $\mathbb{R}$

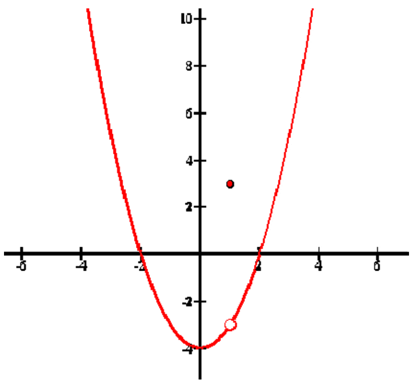
La función $f(x)=\tan x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, excepto en los puntos de la forma $x=k\cdot\dfrac{\pi}{2}$

DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

Discontinuidad evitable en un punto.

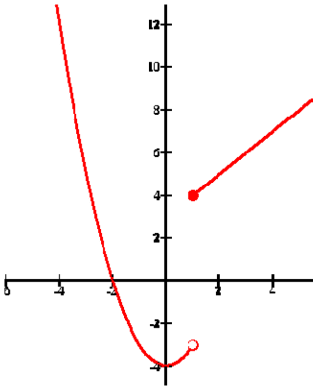
Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto x=a si y sólo si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$

$\lim_{x\to 1} f(x)=-3\neq f(1)=3$



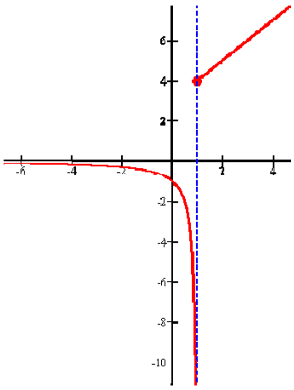
Discontinuidad inevitable de primera especie o de salto

Una función presenta una discontinuidad inevitable de primera especie o de salto en un punto si existen sus límites laterales, pero estos no coinciden (no existe el límite).
La longitud del salto es el valor absoluto de la diferencia de dichos límites laterales.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -3 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$$

$$|-3-4| = |-7| = 7 \qquad \text{(salto finito)}$$



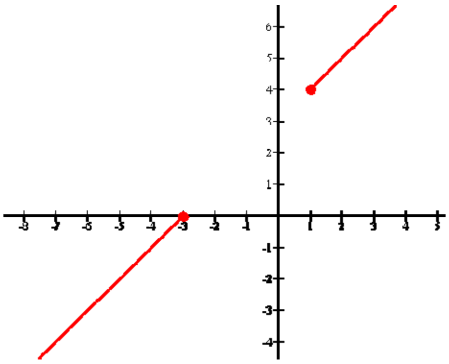
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$$

$$|4-(-\infty)| = |+\infty| = +\infty$$

(salto infinito)

Discontinuidad inevitable de segunda especie o esencial.

Una función presenta una discontinidad inevitable de segunda especie o esencial en un punto, cuando no existe alguno de los límites laterales.



$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \nexists$$

ASÍNTOTAS

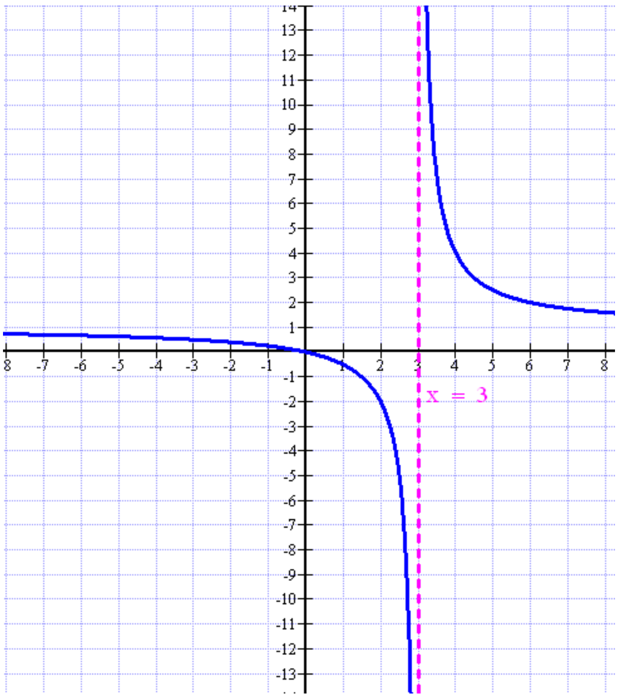
La palabra asíntota, (antiguamente, "asímptota"), proviene del griego *asumptotos*, compuesto de "a" = "sin" y de "*sumpipto"* = "encontrarse"; por tanto, nuestro término viene a significar "sin encontrarse, sin tocarse".

En el estudio de funciones llamamos asíntota a la línea recta hacia la que se aproxima infinitamente la gráfica de la función, pero sin llegar a encontrarse durante dicha aproximación infinita.

ASÍNTOTAS VERTICALES

Cuando una función $f(x)$ no está definida en un punto $"a"$, pero para valores cercanos a dicho punto (por la derecha, por la izquierda o por ambos lados), las imágenes correspondientes se hacen cada vez más grandes en valor absoluto, entonces diremos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$. Es decir:

La recta "*x=a*" es una ASÍNTOTA VERTICAL (AV) de la función $f(x)$ si y solo si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$



$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es AV por la izquierda}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es AV por la derecha}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ es AV}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es AV}$$

Observaciones:

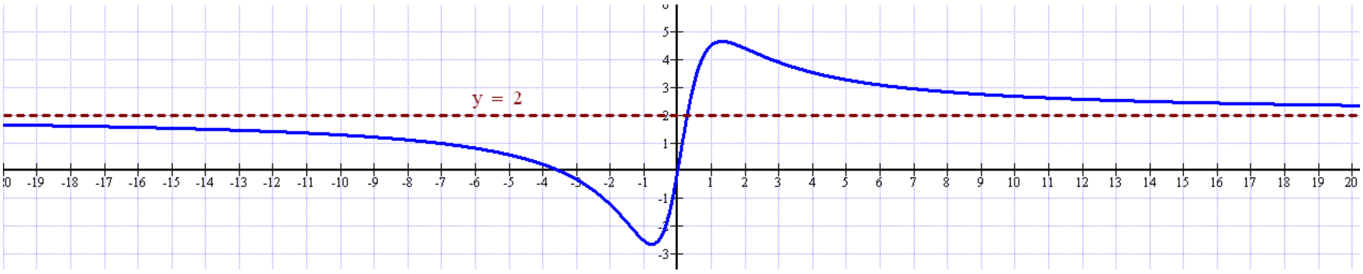
1) Una función puede tener varias asíntotas verticales, incluso infinitas
2) La gráfica de una función nunca corta a una asíntota vertical.
3) La tendencia hacia infinito a ambos lados del punto de discontinuidad puede ser idéntica u opuesta.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si la gráfica de una función $f(x)$, cuando los valores de la variable independiente "x" se hacen muy grandes (en valor absoluto), se van aproximando cada vez más a un valor determinado ($y = k$), sin llegar nunca a tomarlo, entonces decimos que $y = k$ es una asíntota horizontal (AH) de $f(x)$. Es decir:

La recta "y=k" es una ASÍNTOTA HORIZONTAL (AH) de la función f(x) si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \Rightarrow y = k \text{ es AV de } f(x)$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \Rightarrow y = k \text{ es AH por la derecha}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \Rightarrow y = k \text{ es AH por la izquierda}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2 \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2^+ \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ es AH de } f(x)$$

Observaciones:

1) Una función real de variable real puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales (en este último caso, una de ellas es asíntota por la derecha y la otra lo es por la izquierda).
2) Hay funciones que sólo tienen asíntota horizontal por la derecha o por la izquierda.
3) La gráfica de una función puede cortar a una asíntota horizontal.

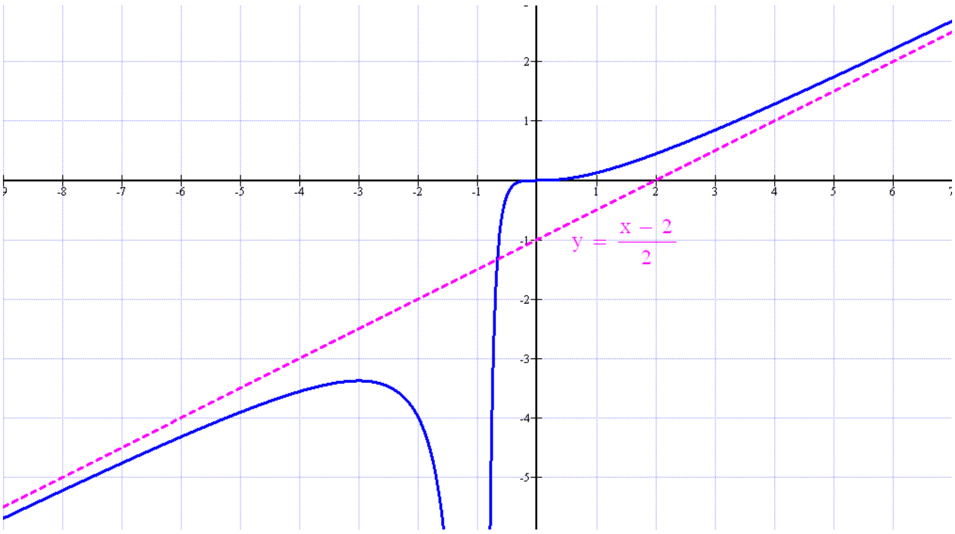
ASÍNTOTAS OBLICUAS

Una recta de ecuación $y = mx + n$ ($m \neq 0$) es una asíntota oblicua (AO) de una función $f(x)$ si para valores de "x" cada vez más grandes (en valor absoluto), los puntos de la recta y los de la gráfica de la función están cada vez más próximos. Es decir:

La recta "y=mx + n " es una ASÍNTOTA OBLICUA (AO) de la función f(x) si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = mx + n$

El cálculo de los valores de m y n se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - n}{x} \Rightarrow m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \; ; \; n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right)$$



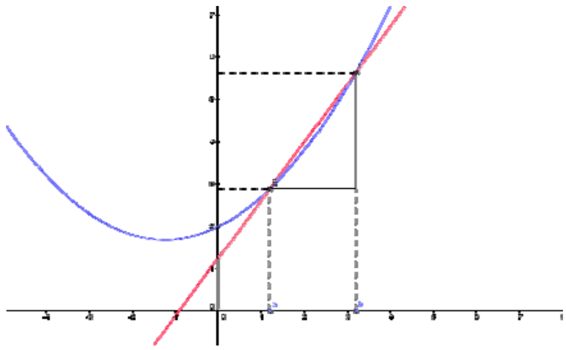
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \; ; \; n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = -1 \Rightarrow y = \frac{x-2}{2} \text{ es AO de } f(x)$$

Observaciones:

1) Si una función tiene asíntotas horizontales, no tiene oblicuas. Esto es evidente, puesto que una asíntota horizontal $y = n$ es realmente un caso particular de la asíntota oblicua $y = mx + n$, con $m = 0$. Por tanto, la presunta asíntota oblicua que buscamos, es la horizontal ya existente.
2) La gráfica de una función puede cortar a una asíntota oblicua.
3) Una función no tiene por qué tener asíntotas. Puede no tener ninguna (cualquier función polinómica); tener sólo asíntotas verticales (una o más); sólo asíntotas horizontales u oblicuas (una o dos como máximo); o tener asíntotas de dos tipos: verticales y horizontales o verticales y oblicuas.

Tasa de Variación Media

$$TVMf\,[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

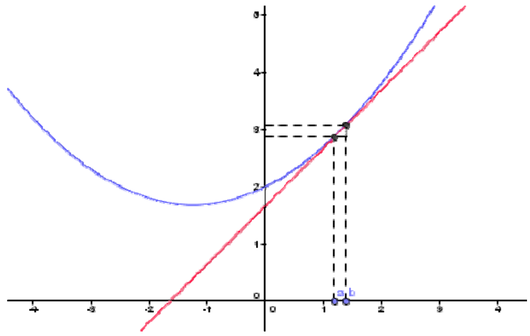


Tasa de Variación Instantánea

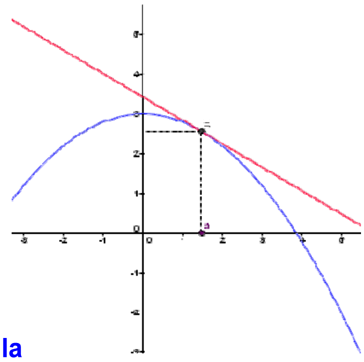
$$TVIf\,(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$Si\ b=a+h:$

$$TVIf\,(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



La derivada de una función f en el punto x = a se representa por f '(a) y es

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Se dice que f es derivable en a si existe y es finito dicho límite

Geométricamente representa el valor de **la pendiente de la recta tangente** a la gráfica en el punto P(a,f(a)): **m=f '(a)**

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto x=a

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

Función derivada:
La función derivada de una función f, o simplemente derivada de f, es aquella que a cada valor x del dominio de f le asigna, si existe, el número f '(x).

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(a)}{h}$$

Derivabilidad de una función en un punto

Toda función f, derivable en un punto, con derivada finita, es continua en ese punto.

El recíproco no es cierto, existen funciones continuas en un punto y no son derivables en él.

Pasos para estudiar la derivabilidad de una función en un punto x_0:

1. Continuidad de una función en un punto.

2. Derivabilidad de la función en $x = x_0$

   Se estudian las derivadas laterales en el punto:

$$f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Leftrightarrow \text{ f es derivable en } x = x_0$$

$$f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+) \Leftrightarrow \text{ f no es derivable en } x = x_0$$

Derivada de las operaciones con funciones:

Derivada de una suma : $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \boxed{f'(x)+g'(x)}$$

Derivada de un producto: $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Restamos y sumamos en el numerador la expresión $f(x)\cdot g(x+h)$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x+h) + f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) + f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$\boxed{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Derivada de un cociente: $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

Restamos y sumamos en el numerador la expresión $f(x)\cdot g(x)$

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{1}{[g(x)]^2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$\boxed{\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Derivada de la composición (regla de la cadena) $y=(v\circ u)\Rightarrow y'=v'(u)\cdot u'$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$

Multiplicamos y dividimos por la expresión $\underline{f(x+h)-f(x)}$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$\boxed{g'(f(x))\cdot f'(x)}$$

CUADRO DE DERIVADAS

FUNCIÓN	DERIVADA	CASOS PARTICULARES
Constante $f(x)=k$	$f'(x)=0$	
Polinómica $f(x)=a+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$	$f'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$	
Producto $f(x)\cdot g(x)$	$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$	
Cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$	
Compuesta $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$	$(g\circ f)'(x)=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$	
Potencial $\left(f(x)\right)^n, n\in\Re^*$	$\left[\left(f(x)\right)^n\right]'=n\cdot\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)$ $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\dfrac{1}{n}\left[(f(x)\right]^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$	$\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}, n\in\mathrm{R}$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial $a^{f(x)}, a\in\Re^+$	$\left[a^{f(x)}\right]'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$	$\left(e^x\right)'=e^x; \left(a^x\right)'=a^x\ln a$
Logarítmica $\log_a f(x), a\in\Re^+$	$\left(\log_a f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$ $\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$ $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$
Trigonométricas: $\operatorname{sen} f(x)$ $\cos f(x)$ $\operatorname{tg} f(x)$ $\operatorname{cotg} f(x)$ $\operatorname{arctg} f(x)$	$\left(\operatorname{sen} f(x)\right)'=f'(x)\cdot\cos f(x)$ $\left(\cos f(x)\right)'=-f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x)$ $\left(\operatorname{tg} f(x)\right)'=f'(x)\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right)$ $\left(\operatorname{cotg} f(x)\right)'=-f'(x)\cdot\left(1+\operatorname{cotg}^2 f(x)\right)$ $\left(\operatorname{arctg} f(x)\right)'=f'(x)\cdot\left(\dfrac{1}{1+f^2(x)}\right)$	$\left(\operatorname{sen} x\right)'=\cos x$ $\left(\cos x\right)'=-\operatorname{sen} x$ $\left(\operatorname{tg} x\right)'=1+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(\cot x\right)'=-\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ $\left(\operatorname{arctg} x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

Funciones

Definición: Es una correspondencia entre dos conjuntos tales que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un único valor del conjunto final.
Variable independiente, *x*; son los valores del conjunto inicial.
Variable dependiente, *y*, son los valores del conjunto final, que dependen de los valores de *x*.

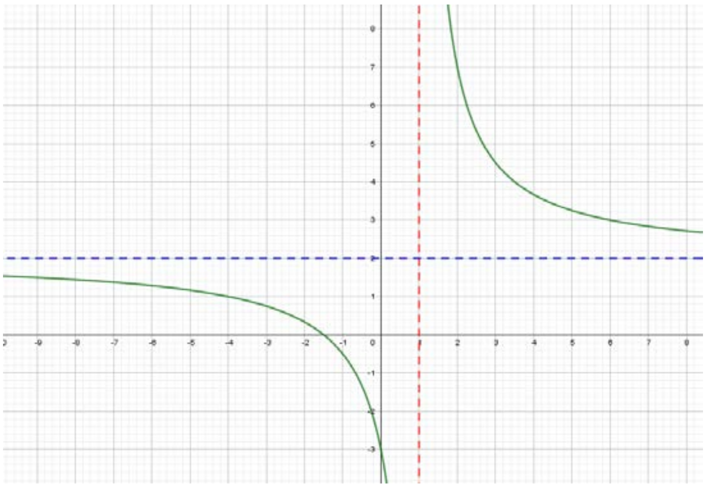
Función real de variable real: Es aquella que hace corresponder a un subconjunto de la recta real con un subconjunto de la misma recta, se representa por: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Dominio de una función: D(f) Es el conjunto de valores que toma el conjunto inicial. Puesto que se trata de funciones reales de variable real, el dominio serán todos los números reales para los que está definida la función $f(x)$.

Recorrido de una función: R(f) o Im(f) Es el conjunto de valores que toma el conjunto final. Para las funciones reales de variable real, el recorrido son todos los valores que toma la variable dependiente.

Ejemplo:

$$f:\quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to y=\frac{2x+3}{x-1}$$
$$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}\ ;\ \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$$



Operaciones con funciones:

- Suma o diferencia de funciones:

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x);\ D(f\pm g)=D(f)\cap D(g)$

- Producto de funciones:

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x);\ D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$

- Cociente de funciones:

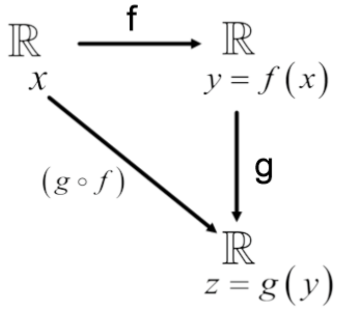
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)};\ D\left(\frac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g),\ g(x)\neq 0$

- Composición de funciones:

Se define la función "f compuesta con g" como:

$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]$

$D\left[(g\circ f)\right]=D(f),\ f(x)\in D(g)$



- Función inversa o recíproca

Si la función f es inyectiva, es decir, cada valor de *x* se corresponde con un único valor de *y*, entonces la función f^{-1} transforma cada valor de *y* en su correspondiente *x*, para cada valor de $y\in\mathrm{Im}(f)$

Si f^{-1} es la función inversa de f, entonces $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=I(x)$, siendo $I(x)$ la función identidad: $I(x)=x$.

Ejemplo: Halla la función inversa de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

1º Se comprueba que $f(x)$ es inyectiva, ya que no se puede obtener el mismo valor de $f(x)$ para dos valores distintos del dominio de $f(x)$:

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

$$f(x_1)=\frac{2x_1+3}{x_1-1}=\frac{2x_2+3}{x_2-1}=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f \text{ es inyectiva}$$

2º Se despeja x de la función $y=\dfrac{2x+3}{x-1}\Rightarrow x=\dfrac{y+3}{y-2}$

3º Se cambia el nombre a las variables: $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

4º Para comprobar que las funciones son inversas se calcula $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)$, comprobando que se obtiene la función identidad: $I(x)=x$.

Observación: Si $f(x)$ admite función inversa, entonces se verifica:

$D(f)=\operatorname{Im}\left(f^{-1}\right)$; $\operatorname{Im}(f)=D\left(f^{-1}\right)$

Puntos de corte con los ejes.

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$.

Punto de corte con el **eje de ordenadas**, recta $x=0$. Si $x=0\in D(f)$ entonces la función corta al eje de ordenadas, **eje Y**, en el único punto $(0, f(0))$. En otro caso, la función no corta al eje Y.

Puntos de corte con el **eje de abscisas**, recta $y=0$. La función $f(x)$ corta al eje de abscisas, eje X, en todos aquellos puntos que verifican la ecuación $f(x)=0$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son de la forma: $(x,0)$

Simetrías.

- Decimos que una función $f(x)$ es **simétrica respecto del eje de ordenadas**, eje Y, cuando $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D(f)$. Estas funciones son llamadas funciones pares.
- Decimos que una función $f(x)$ es **simétrica respecto del Origen**, $O(0,0)$, cuando $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in D(f)$. Estas funciones son llamadas funciones impares.

Ejemplos: Estudia la simetría de las funciones $f(x)=x^2+4$ y $g(x)=x^3-5x$

Calculamos $f(-x)$, $g(-x)$ y comparamos los resultados obtenidos con las funciones dadas.

$$f(-x)=(-x)^2+4=x^2+4=f(x)\Rightarrow \textit{Sim respecto eje } Y$$

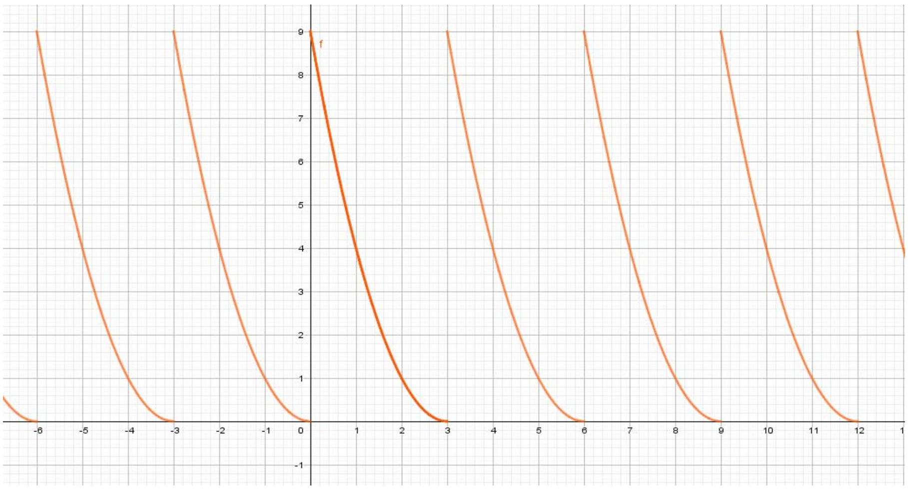
$$g(-x)=(-x)^3-5(-x)=-x^3+5x=-g(x)\Rightarrow \textit{Sim respecto } O(0,0)$$

Periodicidad de una función.

Una función es periódica, de periodo T, si para cada $x \in D(f)$ se verifica $f(x) = f(x+T)$

Ejemplo:

La gráfica siguiente corresponde a una función periódica:



Se puede observar que la ´grafica definida en el intervalo $[0,3)$, de amplitud 3, es la que se repite; así $f(-1) = f(-1+3) = f(2)$; $f(5) = f(5+3) = f(8)$; etc. El período es $T = 3$ y se cumple que $f(x) = f(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$

Monotonía de una función: Crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos.

- Una función, $f(x)$, es monótona creciente, o **creciente,** en un intervalo $[a,b]$ de su dominio, si para cualesquiera $x_1 < x_2 \in (a,b) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Análogamente, una función, $f(x)$, es monótono decreciente, o **decreciente,** en un intervalo $[a,b]$ de su dominio, si para cualesquiera $x_1 < x_2 \in (a,b) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Si para cualesquiera $x_1 < x_2 \in (a,b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f(x)$ es una función **constante** en dicho intervalo.
- Una función presenta un **máximo relativo** en $x = a \in D(f)$ si en un entorno de a, $E_r(a)$, los valores que toma la función son menores o iguales que $f(a)$:

$$f(x) \le f(a), \ \forall x \in E_r(a)$$

Si, además, el valor de $f(a)$ en, es el mayor valor que toma la función en todo su dominio, entonces $x = a$ es el **máximo absoluto** de la función.

- Una función presenta un **mínimo relativo** en $x = a \in D(f)$ si en un entorno de a, $E_r(a)$, los valores que toma la función son mayores o iguales que $f(a)$:

$$f(x) \ge f(a), \ \forall x \in E_r(a)$$

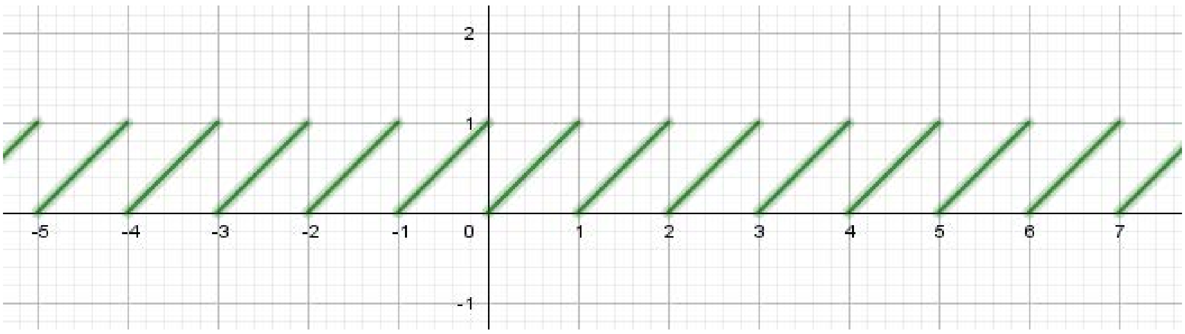
Si, además, el valor de $f(a)$ en, es el menor valor que toma la función en todo su dominio, entonces $x=a$ es el **mínimo absoluto** de la función.

Acotación de una función.

- Una función está **acotada superiormente**, si existe un valor $k\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\leq k,\ \forall x\in D(f)$. La menor de las cotas superiores es el **extremo superior** de $f(x)$. Si además esta cota pertenece a la función, entonces es el **máximo absoluto** de la función $f(x)$.
- Una función está **acotada inferiormente**, si existe un valor $k\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)\geq m,\ \forall x\in D(f)$. La mayor de las cotas inferiores es el **extremo inferior** de $f(x)$. Si además esta cota pertenece a la función, entonces es el **mínimo absoluto** de la función $f(x)$.
- Si una función está acotada superiormente e inferiormente, entonces es una función **acotada**.

Ejemplo:

La gráfica correspondiente a la función parte decimal de un número $f(x)=x-E[x]$ es



Como se puede observar su cota superior es $k=1$, pero no es su máximo absoluto ya que este valor no es alcanzado por la función: $f(x)=x-E[x]<1\ \forall x\in\mathbb{R}$

Su cota inferior es $m=0$, que es su mínimo absoluto, ya que este punto sí pertenece a la función. Este punto se alcanza en todos los números enteros: $f(x)=x-E[x]=0\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

Estudio de la monotonía de una función. Máximos y mínimos relativos.

Para estudiar la monotonía de una función y hallar sus máximos y mínimos relativos se calcula su primera derivada y se estudia su signo:

- Una función es creciente (decreciente) en un intervalo (a,b) de su dominio si y solo si $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ en todos los puntos de dicho intervalo, $\forall x\in(a,b)$.
- Una función presenta un punto crítico, máximo o mínimo relativo en un punto de su dominio $x=c$ si $f'(c)=0$

Si $f'(c)=0$; $c \in D(f)$, en $x=c$ la función presenta un punto crítico. Decimos que en $x=c$ presenta un mínimo si $f'(c^-)<0 \;\; y \;\; f'(c^+)>0$

Decimos que en $x=c$ presenta un máximo si $f'(c^-)>0 \;\; y \;\; f'(c^+)<0$.

Curvatura de una función: concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Para estudiar la curvatura de una función en un intervalo (a,b) se calcula su segunda derivada y se estudia su signo.

- Decimos que una función es cóncava hacia arriba (cóncava) en un intervalo (a,b) si $f''(x)>0, \forall x \in (a,b)$. Análogamente es cóncava hacia abajo (convexa) en un intervalo (a,b) si $f''(x)<0, \forall x \in (a,b)$
- Una función presenta un punto de inflexión, P.I., en $x=c \in D(f)$, cuando se verifica que $f''(c)=0$ y $sig f''(c^-) \neq sig f''(c^+)$

Cuadro de Integrales Inmediatas

$\int dx = x + C$	$\int k dx = kx + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$	$\int \left[f(x) \right]^n f'(x)\ dx = \dfrac{\left[f(x) \right]^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \lvert f(x) \rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x)\ dx = e^{f(x)}$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x)\ dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \operatorname{sen} f(x)\ dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int f'(x) \cos f(x)\ dx = \operatorname{sen} f(x) + C$
$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x \right)\ dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \left[1 + \operatorname{tg}^2 f(x) \right] f'(x)\ dx = \operatorname{tg} f(x) + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{artg} x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{1 + \left[f(x) \right]^2} dx = \operatorname{artg} f(x) + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - \left[f(x) \right]^2}} dx = \arcsin f(x) + C$

Propiedades de la Integral Indefinida:

1. La derivada de la función integral indefinida es igual a la función integrando.

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x)$$

2. La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones.

$$\int \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

3. La integral indefinida del producto de un número real *k* por una función es igual al producto de *k* por la integral indefinida de la función.

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

INTEGRALES

Primitiva de una función

Si f es una función definida en un intervalo [a,b], una primitiva de f en [a,b], es otra función F(x), tal que $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$

Si F es una primitiva de f en [a,b], cualquiera otra primitiva G(x) de f en [a,b] es de la forma F(x)+C.

Si f está definida en [a,b] y admite primitivas en ese intervalo, dado un $x_0 \in [a,b]$, e $y_0 \in R$, hay una sola primitiva de f en [a,b], F(x), tal que $F(x_0) = y_0$.

Integral indefinida

El conjunto de todas las primitivas de f se representa por

$$\int f(x)dx$$

y se denomina integral indefinida de f.

Propiedades de la integral indefinida:

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$

Integración por cambio de variable

El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta.

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = F[g(x)] + C$$

Para cambiar de variable se identifica una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t, de modo que se obtenga una integral más sencilla.

Ejemplo:

$$I = \int 2x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}\ dx = (\text{se aplica el cambio } t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx) = \int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{3\sqrt[3]{t^4}}{4} + C$$

Y deshaciendo el cambio: $I = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^4} + C$

Integración por partes

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

Es consecuencia de la derivada de un producto. A veces es más fácil hallar una primitiva de $f'(x)\cdot g(x)$ que de $f(x)\cdot g'(x)$

Otra expresión equivalente y más utilizada es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo:

$I = \int x\cos x\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

Observaciones:

Al calcular la primitiva de v, se toma como constante de integración C = 0. Sin embargo se podría haber tomado otra constante, pues el resultado habría sido el mismo.

Integración de funciones racionales

Teorema de descomposición en fracciones simples:

Cualquier cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en el que $\mathbf{grad}(P) < \mathbf{grad}(Q)$ puede escribirse como suma de fracciones en las que los denominadores son, o bien una potencia de un binomio (x-a) o bien una potencia de un trinomio de segundo grado x^2+bx+c y el numerador es, respectivamente una constante o un polinomio de grado menor o igual que 1.

Casos:

1. Q(x) es un polinomio de primer grado: Su primitiva es un logaritmo natural.

$$\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$

2. Q(x) es un polinomio de segundo grado sin raíces reales: Su primitiva es un arcotangente.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+4\right]/4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left[(x+1)/2\right]^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{\left[(x+1)/2\right]^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{\left[(x+1)/2\right]^2+1}dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)$$

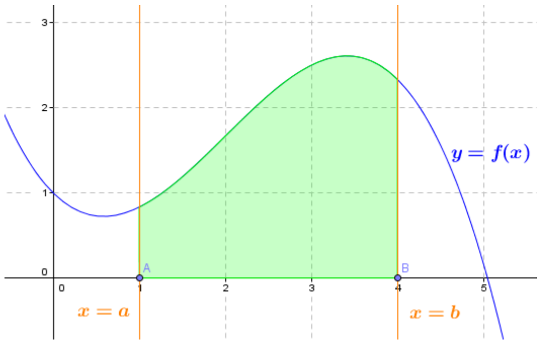
$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[(x+1/2)^2+3/4\right]\cdot(4/3)}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left[(2x+1)/\sqrt{3}\right]^2+1}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left[(2x+1)/\sqrt{3}\right]^2+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$I = \int \frac{x}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

INTEGRAL DEFINIDA

Dada una función real de variable real, f(x) en un intervalo [a,b] R, la integral definida es igual al área de la región del plano limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x = a, x = b.



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Propiedades:

1. La integral definida en un punto es cero:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Aditividad respecto del intervalo de integración. Si c (a,b) entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. (Propiedad de linealidad). La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales definidas.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. La integral definida del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral definida de la función:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

6. Monotonía.

$$\mathbf{f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0;\ \ f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx}$$

7. $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)dx|$$

INTEGRAL DE RIEMANN

Sumas inferior y superior de Riemann. Funciones integrables

Una partición de un intervalo [a,b] es un conjunto finito de números reales $\{x_0, x_1, x_2,\dots,x_n\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 <\dots< x_n = b$

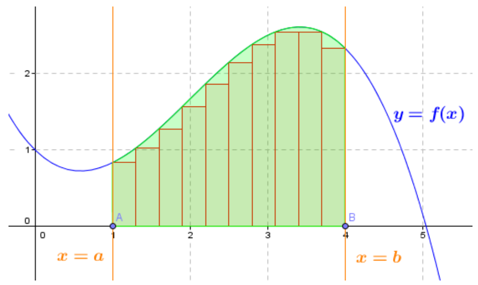
Los segmentos $I_i = [x_{i-1},x_i]$, $1 \leq i \leq n$ se llaman subintervalos de la partición.

Sea f una función continua y acotada en [a,b]. Dividimos el intervalo [a,b] en subintervalos I_i que pueden no tener la misma amplitud.

Sean m_i el valor ínfimo y M_i el valor supremo que toma la función f en el intervalo I_i. Se definen

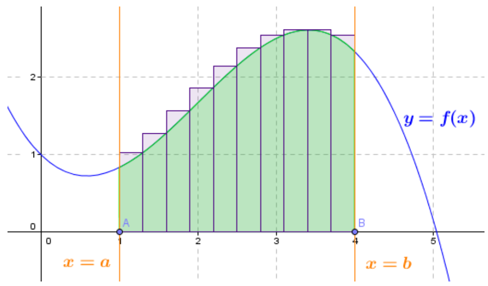
Suma inferior de Riemann:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$



Suma superior de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i - x_{i-1}\right)$$



Criterio de integrabilidad de Riemann (1826-1866):

Una función acotada en [a,b] es integrable en sentido Riemann en [a,b] si y sólo si se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} S_n$$

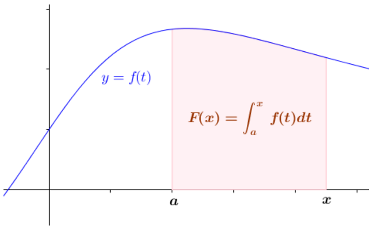
Si f(x) es integrable y f(x)≥0 en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx$ = Área sombreada.

Función integral

Sea f(t) una función continua en el intervalo [a,b]. A partir de esta función se define:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

como la función Área de la función f(t) en el intervalo [a,b]



Geométricamente esta función representa el área del recinto limitado por la curva y=f(t), el eje de abscisas y las rectas t=a y t=x.

Teorema fundamental del cálculo:

Toda función continua, f(x), en un intervalo cerrado, [a,b] admite una primitiva en dicho intervalo.

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \Rightarrow F'(\mathrm{x}) = f(x)$$

Teorema del valor medio del cálculo integral.

El teorema del valor medio para el cálculo diferencial dice:
Si f es una función continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces

$$\exists c \in (a,b),\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

El teorema del valor medio para el cálculo integral es análogo y establece que:

Si f es continua en [a,b] existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Al valor f(c) se le llama valor medio de f en el intervalo [a,b].

Demostración:

$$\text{Si } m \le f \le M \text{ en } [a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Así el número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ es un número comprendido entre el mínimo y el máximo de f en [a,b], por lo que aplicando el teorema de Darboux de los valores intermedios, existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Es decir: $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Regla de Barrow

Si f es continua en [a,b] entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier primitiva de f.

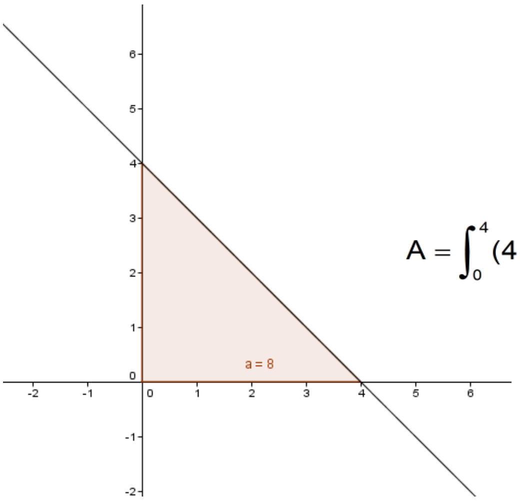
Derivación bajo el signo integral

Sea F(t) una primitiva de f(t), F'(t)=f(t), entonces:

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F\left(v(x)\right) - F\left(u(x)\right)$$

Y derivando los dos extremos de esta igualdad se tiene:

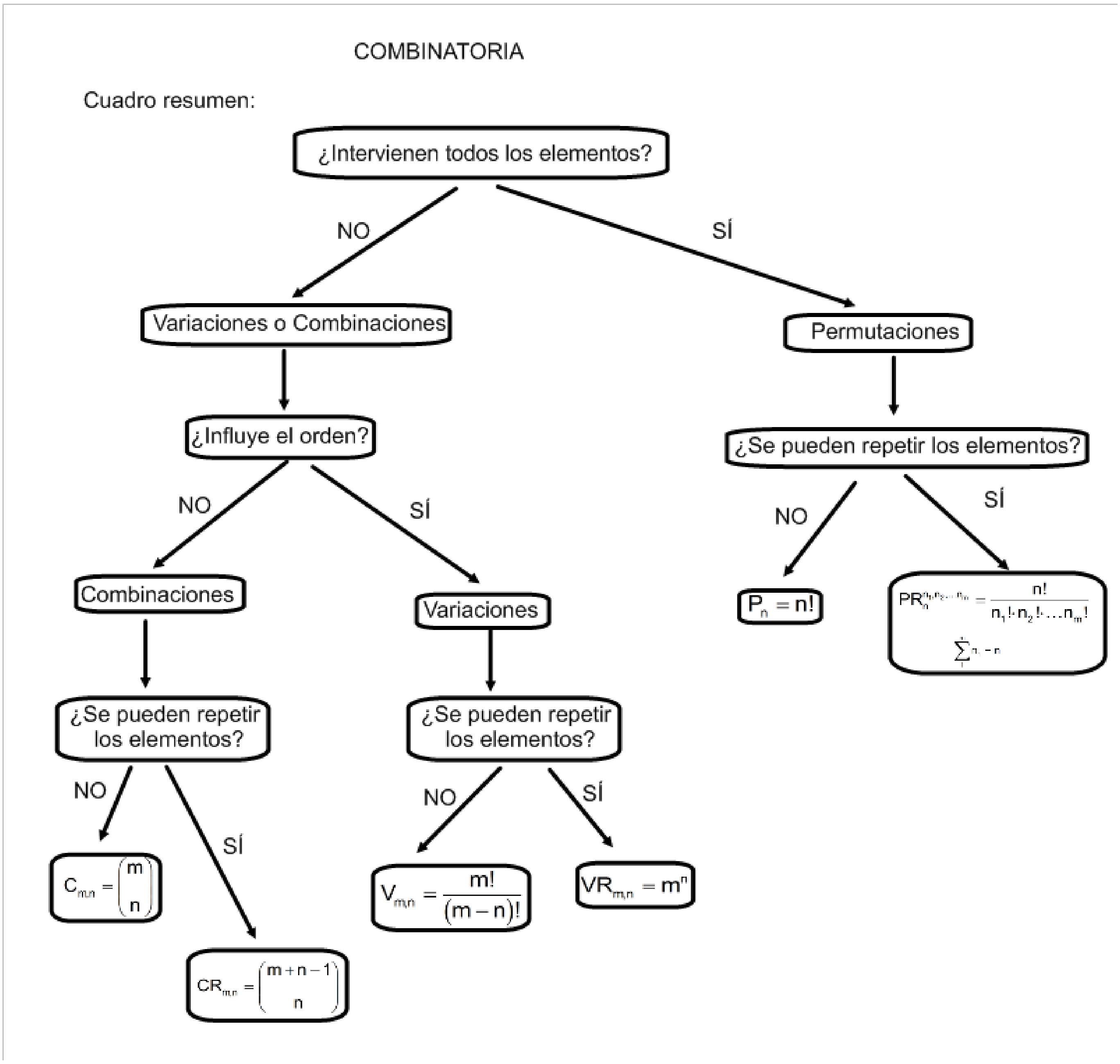
$$g'(x) = \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x)\,dx\right)' = F'\left(v(x)\right)\cdot v'(x) - F'\left(u(x)\right)\cdot u'(x)$$



$$A = \int_0^4 (4-x)\,dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 16 - \frac{16}{2} = 8\ u^2$$

BLOQUE III:
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Combinatoria: Estudio de las agrupaciones u ordenaciones de un conjunto de elementos.



1. Variables aleatorias discretas y continuas

Una variable aleatoria es una función definida en el espacio muestral de un experimento aleatorio que asocia a cada elemento del espacio muestral un número.

$$X : E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A \rightarrow X(A) = x_i$$

Recorrido de la variable aleatoria: conjunto de valores asociados a los elementos del espacio muestral.

Variable aleatoria discreta: Cuando el recorrido de la variable está formado por un número finito de valores o por un número infinito numerable. Por ejemplo, número de llamadas telefónicas recibidas por una central en un año.

Variable aleatoria continua: Cuando el recorrido de la variable pertenece a un intervalo de la recta real, es decir, su recorrido es infinito no numerable. Por ejemplo, tiempo que tarda un atleta en realizar una prueba.

Ej. pág. 274

12.1 Se lanza tres veces una moneda y se define la v. a. X, que asigna a cada elemento del espacio muestral el número de cruces.

a) ¿Qué tipo de variable es?

b) ¿Cuál es su recorrido?

12.2. El tiempo máximo de espera en una parada de autobús es de 5 minutos. Se considera la v. a. X que asigna a una persona el tiempo que tiene que esperar en esa parada a que llegue el autobús.

a) ¿Qué tipo de variable es?

b) ¿Cuál es su recorrido?

2. Funciones de probabilidad y de densidad.

Se llama función de probabilidad de una v. a. discreta X a la función que asocia a cada valor x_i de la variable su probabilidad p_i

$$P : X \to [0,1]$$
$$x_i \to P(X = x_i) = p_i$$

Propiedades de la función de probabilidad:

$1^o.\ 0 \le p_i \le 1\ ;\ i = 1,2,3,\ldots,n$

$2^o.\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$3^o.\ P(a \le X \le b) = P(X = a) + P(X = a+1) + \ldots + P(X = b-1) + P(X = b)$

$4^o.\ P(X \le b) = 1 - P(X > b)$

Media y varianza de una v. a. discreta:

$$\text{Media}: \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$\text{Varianza}: \sigma^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots x_n^2 p_n - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$$

Ej 12.3.Se extraen sin reemplazamiento dos bolas de una urna que contiene dos bolas blancas y una negra. Determina la función de probabilidad de la variable X="nº de bolas blancas extraídas". Calcula la media y la varianza de esta variable.

Se llama función de densidad de una v. a. continua X a la función que cumple:

1º. $f(x) \ge 0$ en todo su dominio.

2º. El área limitada por la gráfica de f(x) y el eje de abscisas es 1.

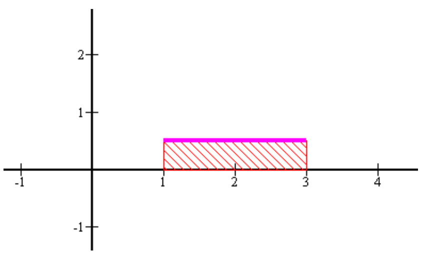
3º. La probabilidad $P(a \le X \le b)$ coincidirá con el área bajo la curva en el intervalo [a,b]

En el caso de las v. a. continuas la probabilidad en un punto es siempre cero.

Ej. pág 275

12.4. Representa la siguiente función y determina si es una función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



TEMA 5: CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1. Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

Experimento: Operación que consiste en provocar cierto fenómeno para observarlo y estudiarlos, como medio de investigación científica.

Experimento determinista: Aquel cuyo resultado se puede predecir de antemano.

Experimento aleatorio: Aquel cuyo resultado final depende del azar, y por tanto su resultado final no se puede predecir de antemano.

Ejemplos:

1. Di si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:

a) Medir distintas apotemas de un pentágono regular de perímetro 30 cm.

b) Predecir las personas que acuden a un centro comercial en un día en concreto.

c) Tiempo que hará el ganador de una maratón.

d) Calcular el coste de una llamada telefónica de 1 minuto de duración.

Espacio muestral, E: Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

2 Un experimento aleatorio consiste en extraer al azar una bola de una urna en la que hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y anotar el número de la bola que hemos extraído. ¿Cuál es el espacio muestral asociado a este experimento?

3 De una baraja española se han tomado las 12 figuras. Se considera el experimento aleatorio que consiste en extraer una carta de ese grupo de cartas. ¿De cuántos elementos está formado el espacio muestral asociado a este experimento? Escribe dicho espacio muestral.

2. Suceso aleatorio. Operaciones con sucesos.

Suceso (A, B, C,...) : Cada uno de los subconjuntos que se puede formar con los elementos del espacio muestral **E.**

Espacio de sucesos, **S**: El conjunto de todos los sucesos de un espacio muestral.
Si el espacio muestral, **E**, tiene **n** elementos entonces el espacio de sucesos tiene $\mathbf{2^n}$. **Card(S)=**$\mathbf{2^n}$

Decimos que un suceso A **se verifica** si al realizar el experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los elementos muestrales que componen el suceso A.

Ejemplos:

4. De una baraja española extraemos una carta. Obtén los elementos que forman los siguientes sucesos.

a) Extraer una carta del palo de bastos.

b) Extraer una figura de oros.

c) Extraer un 5 o una carta del palo de copas.

d) Extraer un as.

e) ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos de este experimento?

5. Se tiene una urna con una bola blanca, otra roja y otra verde. Se van extrayendo bolas de la urna hasta que aparece la bola verde.

a) Determina el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) Obtén los elementos del suceso “no aparecer la bola verde hasta la tercera extracción”.

c)Obtén los elementos del suceso “aparece bola verde en la segunda extracción”.

Operaciones con sucesos.

Tipos de sucesos:

- **Suceso elemental:** Aquel que está formado por un único punto muestral.
- **Suceso compuesto:** Aquel que está formado por dos o más puntos muestrales.
- **Suceso seguro:** Aquel que siempre se verifica.
- **Suceso imposible:** Aquel que no se puede realizar.
- **Suceso contrario o complementario del suceso A:** Aquel que se verifica cuando no se verifica el suceso A.
El suceso contrario o complementario se representa por:

$$\bar{A} \text{ o } A^c$$

- **Sucesos incompatibles:** Aquellos que no pueden verificarse simultáneamente.

En el espacio de sucesos asociado a un espacio muestral **E** pueden definirse las operaciones de *unión, intersección y diferencia de sucesos*:

- **Unión de dos sucesos A y B:** es el suceso que se obtiene cuando se realiza al menos uno de los dos.

$$A \cup B$$

Ejemplo: Al lanzar un dado obtener un número impar o un dos.

- **Intersección de dos sucesos A y B:** es el suceso que se obtiene cuando se cumplen A y B a la vez.

$$A \cap B$$

Ejemplo: Al lanzar un dado obtener un múltiplo de 3 y un número par.

- **Diferencia de dos sucesos A y B:** es el suceso que consiste en que se cumpla A y que no se cumpla **B.**

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Ejemplo: Al lanzar un dado obtener un número par que no sea un dos.

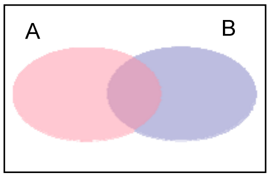
Propiedades para la unión e intersección de sucesos:

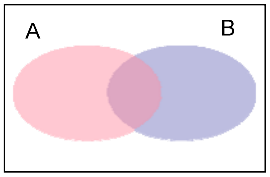
- Asociativa, conmutativa, elemento neutro,

Leyes de De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$





6. **Se lanza un dado cúbico con sus caras numeradas del 1 al 6 y se observa la puntuación de su cara superior. Se consideran los sucesos A = "salir un número par" y B = "salir un múltiplo de 3":**

   a) Obtén los sucesos A^C, $A \cup B$ y $A \cap B$.
   b) ¿Forman A y B un sistema completo de sucesos?

7. **Del experimento consistente en extraer una carta de una baraja española se consideran los siguientes sucesos:**

   A = "extraer un rey"

   B = "extraer un oro"

   C = "extraer un 5 o un 6"

   Indica si hay alguna pareja de sucesos incompatibles.

8. **En el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española consideramos los siguientes sucesos:**

   A = "salir copas" B = "salir un caballo" C = "salir caballo de copas o tres de oros"

   Interpreta los siguientes sucesos.

   a) $A \cup B$
   b) $A \cup C$
   c) $B \cup C$
   d) $A \cap B$
   e) $A \cap C$
   f) $B \cap C$

9. **Se lanzan dos dados cúbicos distinguibles con las caras numeradas del 1 al 6.**

   a) Forma los sucesos A = "la suma de sus puntuaciones es 10", B = "el producto de sus puntuaciones es un múltiplo de 3", C = "el producto de sus puntuaciones es un número primo", D = "la suma de sus puntuaciones es un múltiplo de 5", E = "la suma de sus puntuaciones es superior a 1", F = "la suma de sus puntuaciones es inferior a 2".

   b) Forma los siguientes sucesos: $(A \cup B) \cap F$ y $(B \cap E) \cup F$.

3. Frecuencia y probabilidad. Ley de los grandes números

Se llama frecuencia relativa de un suceso **A** de un experimento aleatorio, y se designa por $h_n(A)$, al cociente entre el número de veces que se ha producido el suceso A, n_A, y el número de veces que se ha realizado el experimento, **n**.

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

Propiedades:

1. La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

$$h_n(E) = \frac{n_E}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2. La frecuencia relativa del suceso imposible es 0.

$$h_n(\varnothing) = \frac{n_\varnothing}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3. La frecuencia relativa de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.

$$0 \le n_A \le n \Rightarrow 0 \le h_n(A) = \frac{n_A}{n} \le 1$$

4. La frecuencia relativa de la unión de dos **sucesos incompatibles**, A y B, es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos.

$$h_n(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = h_n(A) + h_n(B)$$

5. La suma de la frecuencia relativa de un suceso y de la frecuencia relativa de su contrario es 1.

$$n_A + n_{\bar{A}} = n \Rightarrow h_n\left(A \cup \bar{A}\right) = \frac{n_A + n_{\bar{A}}}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Ley de los grandes números. Probabilidad

La **probabilidad de un suceso A** de un experimento aleatorio que puede repetirse un número indefinido de veces, es igual al número al que se aproximan las frecuencias relativas del suceso.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} h_n(A)$$

10. **En la tabla se recoge el número de veces que ha ocurrido el suceso *I* = "obtener impar" al lanzar un dado numerado del 1 al 6 un número creciente de veces. Estima un valor para la probabilidad de *I* y razona si el dado está equilibrado.**

n	10	50	100	500	1000	5000	10 000
I	4	21	38	199	402	2000	3998

4. Definición clásica de probabilidad. Regla de Laplace.

Si un espacio muestral es equiprobable (consta de un número finito de sucesos elementales y todos tienen la misma probabilidad de suceder), entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A yel número de casos posibles.

$$P(A)=\frac{n^{o}\,\text{casos favorables al suceso A}}{n^{o}\,\text{casos posibles}}=\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$$

Ejercicios:

11. **Se elige al azar una ficha de dominó.**

a) Obtén la probabilidad de haber elegido la blanca doble.

b) Obtén la probabilidad de haber elegido una ficha doble.

c) Obtén la probabilidad de que los puntos de la ficha sumen 4.

(Se recuerda que el juego del dominó está formado por 28 fichas.)

Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

***A* = "obtener tres caras" *B* = "obtener dos caras y una cruz" C = "obtener una cara y dos cruces"**

12. **Se considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos.**

a) Obtener suma igual a 3.

b) Obtener suma mayor que 9.

c) Obtener suma menor o igual que 5.

d) ¿Qué es más probable obtener una suma igual a 7 o una suma igual a 6?

5. Definición axiomática de probabilidad

Se llama **probabilidad** a una función que asocia a cada suceso A, de un espacio de sucesos, un número real, perteneciente al intervalo [0,1], que llamamos probabilidad de A, P(A):

$$\begin{aligned} P: S &\rightarrow [0,1] \\ A &\rightarrow P(A) \end{aligned}$$

Esta función cumple los siguientes axiomas:

1. La probabilidad de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1:

$$0 \le P(A) \le 1$$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1:

$$P(E)=1$$

3. La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Propiedades:

1. La probabilidad del suceso contrario al suceso A es 1-P(A).

   Es consecuencia de los axiomas 2º y 3º:

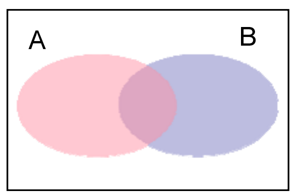
$$A\cup\bar{A}=E\ ;\ A\cap\bar{A}=\varnothing\Rightarrow P\left(A\cup\bar{A}\right)=P(A)+P\left(\bar{A}\right)=1\Rightarrow P\left(\bar{A}\right)=1-P(A)$$

2. La probabilidad del suceso imposible es cero:

$$P(\varnothing)=1-P(E)=1-1=0$$

3. Si A y B son dos sucesos cualesquiera, entonces:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

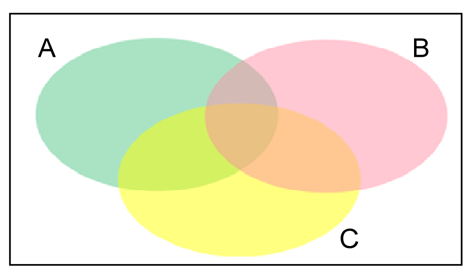


4. (Regla de Laplace) Si el espacio muestral E consta de n resultados que son sucesos equiprobables, entonces cada uno de ellos tiene una probabilidad de 1/n y la probabilidad de un suceso A, con k resultados favorables es:

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

Ejercicio: Calcula la probabilidad de la unión de tres sucesos A, B y C.

$$P(A\cup B\cup C)=$$



Ejercicios:

13. Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6. Calcula:

a) La probabilidad de obtener algún 6.

b) La probabilidad de no obtener ningún 6.

14. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos que forman un sistema completo de sucesos, y donde $P(A) = 0{,}1$, $P(\bar{B}) = 0{,}7$. Calcula $P(C)$.

15. Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los siguientes sucesos:

***A* = "salir una figura", *B* = "salir un as", *C* = "salir una carta del palo de espadas"**

a) ¿Son *A* y *B* incompatibles? Calcula $P(A \cup B)$.

b) ¿Son *A* y *C* compatibles? Calcula $P(A \cup C)$.

16. Se lanza un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 al 6, y se anota su puntuación. Se consideran los sucesos:

***A* = "salir un número par", *B* = "salir un número que es un divisor de 12"**

a) ¿Son *A* y *B* sucesos incompatibles?

b) Calcula la probabilidad de $A \cup B$.

17. Se lanzan al aire tres monedas. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.

18. De los 39 alumnos de una clase, 16 escogieron como idioma el francés, y 27, el inglés. Nueve alumnos eligieron ambos idiomas y el resto no escogió ninguno de ellos. Si se elige al azar a un alumno de dicha clase, halla las siguientes probabilidades.

a) Escogió francés. b) Escogió inglés. c) Escogió ambos idiomas. d) Escogió francés o inglés.
e) Escogió francés, pero no inglés. f) No escogió ni inglés ni francés.

6. Probabilidad condicionada

Ejemplo: La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos al preguntar en una clase de 25 alumnos si practican el fútbol, distinguiendo su sexo:

	C	$\bar{C}$	
F	8	9	17
$\bar{F}$	2	6	8
	10	15	25

C= Chico.
F= Practica el fútbol.

(Este tipo de tablas de doble entrada, reciben el nombre de **tablas de contingencia.)**

A partir de la tabla, calcula las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de elegir a un chico.

$$P(C) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

	C	$\bar{C}$	
F	8	9	17
$\bar{F}$	2	6	8
	10	15	25

b) Probabilidad de elegir un chico que juegue al fútbol.

$$P(C \cap F) = \frac{8}{25}$$

c) Probabilidad de que juegue al fútbol sabiendo que es chico.

$$P(F/C) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{8/25}{10/25} = \frac{P(C \cap F)}{P(C)}$$

Definición: Se llama **probabilidad condicionada** del suceso A respecto del suceso B, P(A/B), a la expresión:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; P(B) \neq 0$$

Análogamente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; P(A) \neq 0$$

Ejercicios:

19. En un pueblo se somete a sus vecinos a votación sobre la instalación de una antena de telefonía. Los resultados vienen recogidos en la siguiente tabla:

	A: Varones	$\bar{A}$: Mujeres	
B: Sí	317	303	620
$\bar{B}$: No	223	314	537
	540	617	1157

Seleccionamos al azar un vecino. Halla *P*(*A*), *P*(*A*/*B*), *P*($\bar{B}$) y *P*($\bar{B}$ /*A*).

$$P(A)=\frac{540}{1157}\simeq 0,467$$

$$P(\bar{B})=\frac{537}{1157}\simeq 0,464$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{317}{620}\simeq 0,511$$

$$P(\bar{B}/A)=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A)}=\frac{223}{540}\simeq 0,413$$

20. **En un experimento aleatorio se sabe que *P*(*A*) = 0,5, *P*(*B*) = 0,7 y *P*(*A* ∪ *B*) = 0,85. Calcula:**

a) *P*(*A* ∩ *B*)

b) *P*(*A*/*B*)

c) *P*(*B*/*A*)

d) *P*(*A*/(*A* ∩ *B*))

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,5+0,7-0,85=0,35$$

b) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,35}{0,7}=0,5$

c) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,35}{0,5}=0,7$

d) $P(A/A\cap B)=\dfrac{P\left[A\cap(A\cap B)\right]}{P(A\cap B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$

21. (PAU) El 60% de los alumnos de un centro aprobaron Filosofía, y el 70% aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es del 80%. Si Juan sabe que ha aprobado Filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

$$P(F)=0,6\ ;\ P(M)=0,7\ ;\ P(F/M)=0,8$$

$$P(F/M)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}\Rightarrow P(F\cap M)=P(M)\cdot P(F/M)=0,7\cdot 0,8=0,56$$

$$P(M/F)=\frac{P(F\cap M)}{P(F)}=\frac{0,56}{0,6}=0,93$$

22. Calcula $P(A)$ sabiendo que $P(B/A)=2P(A\cap B)$

7. Dependencia e independencia de sucesos

Si dos sucesos, A y B, son independientes entonces la probabilidad de que haya sucedido uno de ellos no influye en la probabilidad del otro:

$$P(B) = P(B/A)$$

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de uno de ellos condiciona la del otro. En este caso:

$$P(B) \neq P(B/A)$$

Definición: Se dice que dos sucesos A y B son independientes si la probabilidad de su intersección es el producto de sus probabilidades, esto es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A \text{ y } B \text{ indep} \Rightarrow P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

Propiedades:

1. Si A y B son sucesos independientes, entonces también lo son A y B^c, A^c y B, así como A^c y B^c

Independencia mutua de tres sucesos

Tres sucesos, A, B y C son mutuamente independientes si se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \; ; \; P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \; ; \; P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

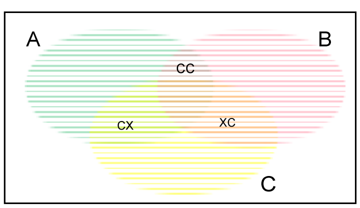
Decimos que son independientes dos a dos si sólo se verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \; ; \; P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \; ; \; P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Ejercicios:

23. Se extraen dos cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que sean dos figuras (sota, caballo o rey) en los siguientes casos: a) Con devolución. b) Sin devolución.

24. Se lanza dos veces una moneda equilibrada. Se llama *A* al suceso "salir cara en el primer lanzamiento"; *B*, al suceso "salir cara en el segundo lanzamiento", y *C*, al suceso "en total aparecen una cara y una cruz". ¿Son *A, B* y *C* independientes dos a dos? ¿Son mutuamente independientes los tres sucesos?



$$E = \{CC; CX; XC; XX\}$$

$$A = \{CC; CX\} \; ; \; B = \{CC; XC\} \; ; \; C = \{CX; XC\}$$

Son independientes dos a dos.

No son mutuamente independientes.

25. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en lanzar dos veces un dado.
a) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?
b) Calcula la probabilidad de obtener primero un 2 y luego un 5.

26. Se considera el experimento aleatorio compuesto consistente en extraer dos cartas de una baraja sin reemplazamiento. a) ¿Cuántos elementos tiene este experimento? b) Calcula la probabilidad de extraer dos reyes.

8. Probabilidad de la intersección de sucesos. Regla del producto.

Experimentos compuestos: Están formados por varios experimentos simples.

Espacio muestral compuesto: Es el espacio muestral asociado a un experimento compuesto.

Teorema (**Regla del producto**): Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n sucesos de un espacio muestral E, tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ Entonces, se verifica:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Ejercicios:

27. Se extraen cuatro cartas de una baraja española. Halla la probabilidad de que las cuatro cartas sean del mismo palo en los siguientes casos:
a) Con devolución de la carta a la baraja.
b) Sin devolución.

28. Las máquinas *A* y *B* producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10%, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas que se han fabricado en una hora y elegimos una al azar. Halla la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina *B* y no sea defectuosa.

29. Se sabe que dado el suceso *A*, la probabilidad de que suceda *B* es de 0,3, es decir, que $P(B/A) = 0{,}3$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que dado *A*, no ocurra *B*?

30. (PAU) Calcula la probabilidad $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$, sabiendo que $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}4$, que $P(A) = 0{,}6$ y que $P(B) = 0{,}8$.

31. (PAU) Sean *A* y *B* dos sucesos con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcula las siguientes probabilidades.

a) $P(a \cup B)$; b) $P(A/B)$; c) $P(A/A \cap B)$; d) $P(A/A \cup B)$

32. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{2}{5}$. Calcula, razonadamente, para qué valor de $P(A \cup B)$ los sucesos *A* y *B* son independientes.

33. Los ciudadanos de una localidad votaron Sí o No a una determinada propuesta que realizó su Ayuntamiento. Los resultados por porcentajes vienen reflejados en la tabla que mostramos a continuación. ¿Son los sucesos *A* = "ser varón" y *B* = "votar Sí" independientes?

	Varones	Mujeres	
SÍ	25%	40%	65%
NO	30%	5%	35%
	55%	45%	

34. (PAU) De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos, y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, halla la probabilidad de que:
a) Ambos acierten. b) Uno acierte y el otro no. c) Ninguno de los dos acierte. d) Alguno acierte.

35. (PAU) Una clase tiene 24 alumnos y todos ellos cursan inglés y matemáticas. La mitad aprueban inglés, 16 aprueban matemáticas, y 4 suspenden inglés y matemáticas.
a) Realiza una tabla de contingencia con los resultados de esta clase.
b) Calcula la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, aprueba matemáticas y suspende inglés.
c) En esta clase, ¿son independientes los sucesos "aprobar inglés" y "aprobar matemáticas"?

a)

	M	$\overline{M}$	
I	8	4	12
$\overline{I}$	8	4	12
	16	8	24

36. (PAU) Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar y sin reemplazamiento cuatro huevos. Calcula la probabilidad de extraer:
a) Los cuatro huevos en buen estado. b) De entre los cuatro huevos, exactamente uno roto.

a) $P(4\,\text{sanos}) = \dfrac{V_{10,4}}{V_{12,4}} = \dfrac{14}{33}$

b) $P(1\,\text{roto}, 3\,\text{sanos}) = \dfrac{V_{4,1} \cdot V_{2,1} \cdot V_{10,3}}{V_{12,4}} = \dfrac{16}{33}$

37. (PAU) En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras se pide calcular la probabilidad de obtener: a) Tres unos. b) Al menos un dos. c) Tres números distintos. d) Una suma de 4.

a) $P(1,1,1) = \dfrac{1}{VR_{6,3}} = \dfrac{1}{216}$

b) $P(\text{algún}\,2) = 1 - P(\text{ningún}\,2) = 1 - \dfrac{VR_{5,3}}{VR_{6,3}} = 1 - \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{91}{216}$

c) $P(\text{tres distintos}) = \dfrac{V_{6,3}}{VR_{6,3}} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \dfrac{5}{9}$

d) $S_4 = \{1,1,2\}$; $P(S_4) = \dfrac{3}{216}$

38. (PAU). Sea *A* un suceso con 0 < *P*(*A*) < 1.
a) ¿Puede ser *A* independiente de su contrario, $\overline{A}$?
b) Sea *B* otro suceso tal que $A \supset B$. ¿Serán *A* y *B* independientes?
c) Sea *C* un suceso independiente de *A*. ¿Serán *A* y $\overline{C}$ independientes?
Justifica las respuestas.

a) No. $A \cap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow P(A \cap \overline{A}) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ o $P(\overline{A}) = 0 \Rightarrow P(A) = 1$

b) No. $P(B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A) = 1$

c) Sí. $P(\overline{C}/A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = 1 - P(C/A) = 1 - P(C) = P(\overline{C})$

9. Teorema de la probabilidad total

Teorema (**teorema de la probabilidad total**): Sean A_1, A_2, A_3,... A_n un sistema completo de sucesos tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de B/A_i. i=1,2,...,n. Entonces:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots+P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

Ejemplo:

En un colectivo hay un 60% de hombres y un 40% de mujeres. El 30% de los hombres son atletas así como el 25% de las mujeres. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

$$A = \text{atletismo} \ ; \ H = \text{hombres} \ ; \ M = \text{mujeres}$$

$$P(A)=P(H)\cdot P(A/H)+P(M)\cdot P(A/M)=0,6\cdot 0,3+0,4\cdot 0,25=0,28$$

Ejercicios:

39. (PAU) La ciudad *A* tiene el triple de habitantes que la ciudad *B*, pero la proporción de universitarios en la ciudad *B* es el doble que en la *A*.
a) ¿En qué ciudad hay más universitarios?
b) Se elige un habitante al azar. Averigua la probabilidad de que sea universitario, sabiendo que la proporción de estos en la ciudad *A* es del 10%.

a) Habitantes de B: x ; habitantes de A: 3x ; proporción de universitarios de A: p ; proporción de universitarios de B: 2p.

Universitarios de A: **3px**
Universitarios de B: **2px**

Hay más universitarios en A.

$$\text{b) } P(U)=P(A)\cdot P(U/A)+P(B)\cdot P(U/B)=\frac{3}{4}\cdot 0,1+\frac{1}{4}\cdot 0,2=\frac{1}{8}$$

40. (PAU) Ana, Juan y Raúl están esperando para realizar una consulta médica y sortean el orden en que van a entrar.
a) Halla la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.
b) Determina si son independientes los sucesos:
***S_1* = “la mujer entra antes que alguno de los hombres”. *S_2* = “los dos hombres entran consecutivamente”.**

$$\text{a) } P(MHH)=\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } P(S_1)=P(MHH)+P(HMH)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$P(S_2)=P(MHH)+P(HHM)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$S_1\cap S_2=\{MHH\} \ ; \ P(S_1\cap S_2)=\frac{1}{3}\neq P(S_1)\cdot P(S_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

10. Teorema de Bayes

Teorema: Sean A_1, A_2, ..., A_n un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinto de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades $P(B/A_i)$. El teorema de Bayes establece que las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B/A_j)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+\ldots P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

- Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan **a priori.**
- Las probabilidades $P(B/A_i)$ se denominan **verosimilitudes.**
- Las probabilidades $P(A_i/B)$ se denominan a **posteriori.**

Ejercicios:

41. (PAU) Tenemos dos bolsas de caramelos. La primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón, y la segunda, 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo.
a) Halla la probabilidad de que el caramelo sea de naranja.
b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la segunda bolsa?

42. (PAU) Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color, se descarta y se introducen dos bolas del otro color en la urna. Luego se extrae otra bola al azar.
Sabiendo que la segunda bola extraída ha sido blanca, calcula la probabilidad de que la primera haya sido negra.

43. (PAU) Una fábrica dispone de tres máquinas *A, B* y *C* que fabrican arandelas. Se sabe que la máquina *A* produce un 1% de arandelas defectuosas; la *B*, un 3%, y la *C*, un 2%. La máquina *A* produce el 25% del total de las arandelas; la *B*, el 40%, y la *C*, el 35% restante. Al cabo de un día se toma una arandela al azar de la producción total.
Si la arandela elegida es defectuosa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina *A*.

44. (PAU) En una caja hay 10 bombillas, 2 de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas, vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

45. (PAU) Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma, y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula la probabilidad de que:
a) Un paciente no fumador sea hombre.
b) Un paciente sea hombre fumador.
c) Un paciente sea mujer.

46. (PAU) En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%; la segunda, el 45%, y la tercera, el 25% restante. Se ha comprobado que el 1% de las inspecciones que realiza la primera persona son erróneas, la segunda persona comete un 3% de errores, y la tercera, un 2%.
a) Halla la probabilidad de realizar una auditoría correctamente.
b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

47. (PAU) La plantilla de empleados de unos grandes almacenes está formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana. Elegido uno de los empleados al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana?
b) Sabiendo que el empleado elegido no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

48. El 25% de los aparatos que llegan a un servicio técnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y además ya fueron reparados en otra ocasión.
a) ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio ya fueron reparados en otra ocasión?
b) ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y además no tienen garantía?
c) Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión. ¿Qué probabilidad hay de que tenga garantía?

4. Distribución Normal, N(μ,σ)

Esta es una distribución teórica, ya que su función de densidad viene dada por una fórmula matemática y nunca coincidirá exactamente con los datos observados empíricamente, sin embargo, debe su importancia a que:

-Numerosas variables aleatorias siguen este modelo; por ejemplo el peso de los niños al nacer, la altura de los jugadores de baloncesto,...

-Algunas distribuciones pueden aproximarse, como veremos al estudiar el Teorema Central del Límite, a distribuciones normales.

-Las distribuciones muestrales de varios estadísticos, que estudiaremos en Inferencia Estadística, y que son de gran importancia para la obtención de información de una población a partir de una muestra, siguen distribuciones normales si los tamaños de las muestras son suficientemente grandes.

Distribución Normal, N(μ,σ)

Una v. a. continua X sigue una **distribución normal de media μ y desviación típica σ, N(μ,σ)** si cumple que:

-El recorrido de la variable X es toda la recta real.

-Su función de densidad es:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Esta función se conoce como la función de Gauss y su gráfica recibe el nombre de curva de Gauss o campana de Gauss, debido a su forma.

Características de la función de densidad:

- Su dominio es toda la recta real.
- Es simétrica respecto de la media, $x = \mu$.
- No corta al eje de abscisas; y corta al eje de ordenadas en el punto $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$
- El eje de abscisas es una asíntota horizontal.
- Monotonía: Crece hasta $x = \mu$ y decrece desde $x = \mu$. Presenta un máximo en $x = \mu$.
- Presenta dos puntos de inflexión: $x = \sigma-\mu$; $x=\sigma+\mu$
- Por ser simétrica y función de densidad, el área bajo la curva a la izquierda y a la derecha de la media, $x = \mu$, es la misma.

Distribución Normal estándar N(0,1)

Es la que tiene media cero y desviación típica 1. Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

La gran ventaja de la distribución N(0, 1) es que se encuentra tabulada, y ello nos permite calcular fácilmente las probabilidades asociadas a los distintos valores de la variable.

Tipificación de la variable

Para calcular probabilidades en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ cualquiera se hace el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

conocido como ***tipificación de la variable X,*** que tiene la propiedad de transformar X en una variable Z que es normal estándar.

Este cambio de variable consiste en:
1º: Trasladar la media de la distribución al origen de coordenadas (al restarle μ a X)
2º: Hacer un *cambio de escala* (reducir o aumentar) para conseguir que la nueva desviación típica valga la unidad (al dividir por σ).

Uso de las tablas:

$$P(Z < a)\ ;\ P(Z > a)\ ;\ P(Z < -a)\ ;\ P(Z > -a)\ ;\ P(a < Z < b)$$

12.7. Una variable X sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 1,2. Calcula las siguientes probabilidades.
a) $P(X \leq 4)$; b) $P(3{,}5 \leq X \leq 4{,}5)$

12.8. (PAU) En una panadería se cortan panecillos con un peso que se ajusta a una distribución normal de media 100 gramos y desviación típica 9 gramos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un panecillo cuyo peso oscile entre 80 gramos y la media?

1. Población y muestra. Representatividad

Población: conjunto de todos los elementos que poseen una determinada característica.

Muestra: Parte de la población qe se observa para extraer información sobre dicha población.

Muestreo: proceso mediante el cual se selecciona la muestra de la población.

Representatividad: Para que una muestra sea representativa de la población, debe cumplir doscondiciones fundamentales:

- Tener un tamaño adecuado.
- Sus elementos han sido seleccionados de manera aleatoria.

2. Tipos de muestreo.

Muestreo aleatorio simple (m.a.s.): Todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos para formar parte de la muestra.

El m.a.s. es adecuado cuando la población es homogénea.
Ejemplo: Gasto medio de las personas que acuden a un determinado centro comercial.

Muestreo aleatorio sistemático: Se ordenan los elementos de la población. Se selecciona un elemento al azar y, a partir de él, se van seleccionando los demás elementos de la muestra igualmente espaciados.

Ejemplo: Billete de los viajeros de un tren.

Muestreo aleatorio estratificado: La población se divide en grupos homogéneos, **estratos**, y posteriormente se extrae una muestra aleatoria de cada estrato, de modo que en la muestra cada estrato mantenga la misma proporción que la población.

Ejemplo: Deportes preferidos de los alumn@s de un instituto.

Muestreo por conglomerados y áreas: La población se divide en varias secciones llamadas áreas o conglomerados. Se eligen al azar algunos de ellos y los componentes de estos conglomerados serán los que formen la muestra.

Ejemplo: Estado de los libros de las bibliotecas municipales de una ciudad.

3. Distribución en el muestreo de una proporción.

La distribución en el muestreo de una proporción se realiza para estudios de variables aleatorias discretas.

A partir de una muestra, se obtiene la proporción, p, de elementos que hay en la muestra cumpliendo la característica analizada. Es evidente que el valor de p variará de una muestra a otra.

Los distintos valores de p dan lugar a una variable aleatoria que se representa por $\hat{P}$ y que se llama **estadístico.**

La variable aleatoria $\hat{P}$ tiene las siguientes características:

Media : $\mu = p$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

A medida que n crece, $\hat{P}$ se aproxima a $N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

siempre que p no sea un valor próximo a 0 o 1

Ejemplo: ej 13.3

El 5% de los pasteles que hace un pastelero tienen un exceso de peso. Se toma una muestra de 45 pasteles:
a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de pasteles con exceso de peso de la muestra?
b) Halla la probabilidad de que en la muestra existan al menos cuatro pasteles con exceso de peso.
c) Halla la probabilidad de que en la muestra el porcentaje de pasteles con exceso de peso sea superior al 8,5%.

a) $\hat{P} = N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

$$\hat{P} = N\left(0{,}05; \sqrt{\frac{0{,}05 \cdot (1-0{,}05)}{45}}\right) = N(0{,}05; 0{,}0325)$$

b) $X = B(45; p)$

$$P(X \geq 4) \simeq P(X' \geq 3{,}5)$$

$$\frac{3{,}5}{45} = 0{,}078 \Rightarrow P(X \geq 4) \simeq P(\hat{P} \geq 0{,}078) = P\left(Z \geq \frac{0{,}078 - 0{,}05}{0{,}0325}\right) = P(Z \geq 0{,}86)$$

$$P(Z \geq 0{,}86) = 1 - P(Z < 0{,}86) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949$$

c) $P(\hat{P} \geq 0{,}085) = P\left(Z \geq \dfrac{0{,}085 - 0{,}05}{0{,}0325}\right) = P(Z \geq 1{,}08) = 1 - 0{,}8599 = 0{,}1401$

13.4. En la elección para formar parte del consejo escolar, un alumno ha recibido un 50% de votos desfavorables, si se elige una muestra de 40 alumnos que han votado.
a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que le han votado?
b) Halla la probabilidad de que más del 40% de la muestra le votasen.

a) $\sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}5(1-0{,}5)}{40}} = 0{,}079 \Rightarrow N(0{,}5;\ 0{,}079)$

b) $P(\hat{P} > 0{,}4) = P\left(Z > \dfrac{0{,}4 - 0{,}5}{0{,}079}\right) = P(Z > -1{,}27) = P(Z < 1{,}27) = 0{,}8980$

4. Distribución en el muestreo de la media

La distribución en el muestreo de la media se realiza para estudios de variables aleatorias continuas.

A partir de una muestra, podemos obtener el valor de la media, $\overline{X}$ y la desviación típica, **s**, de sus elementos. Evidentemente, si se tomase otra muestra, la media y la desviación típica obtenidas serían distintas.

Los diferentes valores de la media, dan lugar a una variable aleatoria continua que se representa por $\overline{X}$ y que se denomina **estadístico.**

La variable aleatoria $\overline{X}$ tiene las siguientes características:

$$\text{Media: coincide con la media de la población } \mu$$

$$\text{Desviación típica: } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{A medida que n crece, } \overline{X} \text{ se aproxima a } N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Si la desviación típica es desconocida y el tamaño de la muestra es grande n>30, entonces se toma como desviación típica la cuasidesviación típica muestral.

$$\sigma = s_{n-1}$$

13.5. La emisión de óxido de nitrógeno de los vehículos de cierta marca sigue una distribución normal con media **μ** = 1,2 y desviación típica **σ** = 0,4. Se escoge al azar una muestra de 25 vehículos.
a) ¿Cuál es la distribución en el muestreo de la media?
b) Halla la probabilidad de que la media de la muestra sea mayor de 1,2.

$$\text{a) } \sigma = \frac{0,4}{\sqrt{25}} = 0,08 \Rightarrow N(1,2;\ 0,08)$$

$$\text{b) } P(\overline{X} > 1,2) = 0,5$$

13.6. El peso de las vacas de una determinada ganadería se distribuye según una normal de media 495 kg y desviación típica 44 kg. Se toma una muestra de 35 vacas de esa ganadería. Halla la probabilidad de que la media muestral:
a) Sea mayor de 500 kg.
b) Sea menor de 480 kg.
c) Esté comprendida entre 490 y 500 kg.

$$\overline{X} \sim N\left(495; \frac{44}{\sqrt{35}}\right) = N(495; 7,44) \Rightarrow Z = \frac{\overline{X} - 495}{7,44} \sim N(0;1)$$

$$\text{a) } P(\overline{X} > 500) = P\left(Z > \frac{500-495}{7,44}\right) = P(Z > 0,67) = 1 - P(Z < 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$$

$$\text{b) } P(\overline{X} < 480) = P\left(Z < \frac{480-495}{7,44}\right) = P(Z < -2,02) = 1 - P(Z < 2,02) = 1 - 0,9783 = 0,0217$$

$$\text{c) } P(490 < \overline{X} < 500) = P\left(\frac{490-495}{7,44} Z < \frac{500-495}{7,44}\right) = P(-0,67 < Z < 0,67) =$$

$$= P(Z < 0,67) - P(Z < -067) = 2P(Z < 0,67) - 1 = 2 \cdot 0,7486 - 1 = 0,4972$$

5. Distribución de las sumas muestrales

En una población se quiere estudiar la suma de un número determinado de valores, el valor de la media poblacional de esta suma y la desviación típica poblacional de esta suma.

A partir de una muestra de tamaño n, se obtiene la suma media muestral (t) y la desviación típica muestral de la suma (s).
Los distintos valores de t dan lugar a una variable aleatoria que representamos por $\hat{T}$ y que se llama **estadístico** de las sumas muestrales.

La variable aleatoria $\hat{T}$ tiene las siguientes características:

Media : $n \cdot \mu$

Desviación típica: $\sigma\sqrt{n}$

A medida que n crece, $\hat{T}$ se aproxima a $N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$

Ejercicio pág 296

13.8. Las consultas de un médico de cabecera duran una media de 8 minutos, con una desviación típica de 2,3 minutos. Si una tarde tiene citados 32 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que los atienda en menos de 4 horas?

$$\hat{T} \sim N\left(32 \cdot 8; \sqrt{32} \cdot 2,3\right) = N(256;13,01)$$

$$P\left(\hat{T} < 240\right) = P\left(Z < \frac{240 - 256}{13,01}\right) = P(Z < -1,23) = 1 - P(Z < 1,23) = 1 - 0,8907 = 0,1093$$

13.9. Una empresa comercializa sal y la empaqueta en bolsas de 500 gramos. Se sabe que los pesos reales de las bolsas siguen una distribución normal de media 498 g y desviación típica 8 g.
a) Si se toma una muestra de 100 bolsas, ¿qué probabilidad hay de que el peso total de las mismas sea inferior a 48 kg?
b) Si se toma una muestra de 50 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que el peso total de las mismas supere los 25 kg?

a) $\hat{T} \sim N\left(100 \cdot 0,498; \sqrt{100} \cdot 0,008\right) = N(49,8;0,08)$

$$P\left(\hat{T} < 48\right) = P\left(Z < \frac{48 - 49,8}{0,08}\right) = P(Z < -22,5) = 0$$

b) $\hat{T} \sim N\left(50 \cdot 0,498; \sqrt{50} \cdot 0,008\right) = N(24,9;0,057)$

$$P\left(\hat{T} > 25\right) = P\left(Z > \frac{25 - 24,9}{0,057}\right) = P(Z > 1,75) = 1 - P(Z < 1,75) = 1 - 0,9599 = 0,0401$$

6. Distribución en el muestreo de la diferencia de medias

Esta distribución se utiliza para comparar una característica común de dos poblaciones distintas.
El estadístico que se considera es el de la diferencia de sus medias muestrales y se representa por $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$

Ladistribución en el muestreo de la diferencia de medias tiene las siguientes características:

Media : $\mu_1 - \mu_2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}$

A medida que crecen n_1 y n_2 la distribución $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ se aproxima a $N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}\right)$

Ejemplo:

13.10. Se sabe que el peso X de la grasa corporal en adultos que no hacen ejercicio sigue una distribución con media de 24,3 kg y desviación típica de 2,4 kg. En cambio, el peso Y de la grasa en adultos que hacen ejercicio regularmente se distribuye con una media de 20,1 kg y desviación típica de 1,7 kg. Si se eligen en ambas poblaciones muestras aleatorias de 50 elementos, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de la grasa corporal media sea mayor de 3 kg?

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(24,3 - 20,1\,;\, \sqrt{\frac{2,4^2}{50} + \frac{1,7^2}{50}}\right) = N(4,2;0,4159)$$

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 3\right) = P\left(Z > \frac{3 - 4,2}{0,4159}\right) = P(Z > -2,89) = P(Z < 2,89) = 0,9981$$

13.11. Uno de los principales fabricantes de televisores compra piezas a dos compañías. Las piezas de la compañía *A* tienen una vida media de 7,2 años con una desviación estándar de 0,8 años, mientras que las de la *B* tienen una vida media de 6,7 años con una desviación estándar de 0,7. Determina la probabilidad de que una muestra aleatoria de 34 piezas de la compañía *A* tenga una vida media de al menos un año más que la de una muestra aleatoria de 40 piezas de la compañía *B*.

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(7,2 - 6,7\,;\, \sqrt{\frac{0,8^2}{34} + \frac{0,7^2}{40}}\right) = N(0,5;0,1763)$$

$$P\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > 1\right) = P\left(Z > \frac{1 - 0,5}{0,1763}\right) = P(Z > 2,84) = 1 - P(Z < 2,84) = 1 - 0,9977 = 0,0023$$

7. Teorema central del límite

Sea X una v. a. de una población de media μ y desviación típica σ ; entonces se verifica:

La distribución de las medias muestrales de tamaño n tiene media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La distribución de las medias muestrales se aproxima a una normal a medida que crece el tamaño de la muestra.

- Si la población de partida es normal, la distribución de las muestras será normal, independientemente del tamaño de la muestra.
- Si la muestra de partida no es normal, la distribución de las medias se podrá aproximar por una normal cuando el tamaño de la muestra sea mayor o igual a 30.

Ejemplo:

13.12. Una variable aleatoria tiene media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 3{,}5$.
Se eligen al azar muestras de tamaño *n*.
¿Qué se puede decir de la distribución de las medias muestrales en los siguientes casos?
a) $n = 20$; b) $n = 40$

a) No se puede decir nada, porque n<30 y no se sabe si la población de partida se corresponde con una distribución normal; por tanto no se puede aplicar el teorema central del límite.

b) Puesto que n>30:

$$\bar{X} \sim N\left(30\ ;\ \frac{3{,}5}{\sqrt{40}}\right) = N(30;0{,}5534)$$

13.13. En la clase de 2.º de Bachillerato se sabe que el peso de los alumnos se distribuye normalmente con media de 64 kg y desviación típica de 8 kg. Se toma una muestra de 10 alumnos.
a) ¿Cuál es la distribución que siguen las medias muestrales?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso en la muestra esté entre 60 y 68 kg?

a) $\bar{X} \sim N\left(64\ ;\ \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(64;2{,}5298)$

b) $P\left(60 \le \bar{X} \le 68\right) = P\left(\frac{60-64}{2{,}5298} \le Z \le \frac{68-64}{2{,}5298}\right) = P\left(-1{,}58 \le Z \le 1{,}58\right) =$

$$= 2P\left(Z \le 1{,}58\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}9429 - 1 = 0{,}8858$$

Problemas, pág 302-303

13.18. En unas elecciones generales, el presidente del gobierno elegido por los ciudadanos ha recibido un 45% de los votos favorables. Se escoge una muestra al azar de 50 votantes.
a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que han votado al presidente de la muestra?
b) Halla la probabilidad de que más de la mitad de los votantes de la muestra votasen al presidente.

$$\text{a) } \hat{P} = N\left(0{,}45; \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{50}}\right) = N(0{,}45;\ 0{,}07)$$

$$\text{b) } P\left(\hat{P} > 0{,}5\right) = P\left(Z > \frac{0{,}5 - 0{,}45}{0{,}07}\right) = P(Z > 0{,}71) = 1 - P(Z < 0{,}71) = 1 - 0{,}7611 = 0{,}2389$$

13.19. El 4% de las piezas que produce una máquina son defectuosas. Se toma una muestra aleatoria de 80 piezas:
a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de piezas defectuosas de la muestra?
b) Halla la probabilidad de que en la muestra existan menos de 3 piezas defectuosas.

$$\text{a) } \hat{P} = N\left(0{,}04; \sqrt{\frac{0{,}04 \cdot 0{,}96}{80}}\right) = N(0{,}04;\ 0{,}022)$$

$$\text{b) } \frac{3}{80} = 0{,}0375\ ; P\left(\hat{P} < 0{,}0375\right) = P\left(Z < \frac{0{,}0375 - 0{,}04}{0{,}022}\right) = P(Z < -0{,}11)$$

$$P(Z < -0{,}11) = 1 - P(Z < 0{,}11) = 1 - 0{,}5438 = 0{,}4562$$

13.20. Una población de un tipo de plantas tiene una talla media de 15 cm y desviación típica de 2,5 cm. Se toma al azar una muestra de 45 plantas. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las tallas de la muestra sea superior a 12,5 cm?

$$\bar{X} = N\left(15; \frac{2{,}5}{\sqrt{45}}\right) = N(15;\ 0{,}37)$$

$$P\left(\bar{X} > 12{,}5\right) = P\left(Z > \frac{12{,}5 - 15}{0{,}37}\right) = P(Z > -6{,}76) = P(Z < 6{,}76) = 1$$

13.24. El dinero que se gastan los adolescentes de entre 16 y 18 años durante un fin de semana sigue una distribución desconocida de media 6,20 € y desviación típica 1,90 €. Se toma al azar una muestra de 60 de esos adolescentes.
a) ¿Qué distribución sigue la media del gasto en dicha muestra?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del gasto en esa muestra sea superior a 7 €?
c) ¿Qué hubiese ocurrido si tomamos una muestra de solo 28 estudiantes?

$$\text{a) } n = 60 > 30 \Rightarrow \bar{X} = N\left(6{,}20; \frac{1{,}9}{\sqrt{60}}\right) = N(6{,}20;\ 0{,}25)$$

$$\text{b) } P\left(\bar{X} > 7\right) = P\left(Z > \frac{7 - 6{,}20}{0{,}25}\right) = P(Z > 3{,}2) = 1 - P(Z < 3{,}2) = 1 - 0{,}9993 = 0{,}0007$$

c) No se podría decir nada, ya que no se sabe qué tipo de distribución es la inicial.

13.25. En un instituto hay 600 alumnos, 70 profesores y 10 auxiliares. Si queremos seleccionar una muestra de 68 individuos con la técnica del muestreo estratificado, ¿cómo deberíamos proceder?

$N = 600 + 70 + 10 = 680$ individuos forman la población.

$$\text{Al} = \frac{600}{680} \cdot 68 = 60 \text{ ; } P = \frac{70}{680} \cdot 68 = 7 \text{ ; } \text{Aux} = \frac{10}{680} \cdot 68 = 1$$

13.27. La talla de los soldados de un ejército sigue una distribución normal *N*(175; 8,5). Para realizar una determinada tarea se elige al azar a 68 soldados. Calcula la probabilidad de que la talla media de esos soldados sea superior a 173 cm.

$$\bar{X} = N\left(175; \frac{8,5}{\sqrt{68}}\right) = N(175; 1,03)$$

$$P(\bar{X} > 173) = P\left(Z > \frac{173 - 175}{1,03}\right) = P(Z > -1,94) = P(Z < 1,94) = 0,9738$$

13.31. Un laboratorio fabrica comprimidos efervescentes en forma de disco, cuyo diámetro *X* quiere controlar. La variable aleatoria *X* tiene por media μ = 15 mm y desviación típica σ = 4 mm. A intervalos fijos de tiempo se extraen muestras de tamaño 64 de las que se miden los diámetros.
a) ¿Qué tipo de muestreo se está realizando?
b) Determina la distribución en el muestreo de la variable media muestral.
c) Calcula la probabilidad de que dicha variable esté comprendida entre 13 y 16 mm.

a) Muestreo aleatorio sistemático.

b) $\bar{X} = N\left(15; \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(15; 0,5)$

c) $P(13 < \bar{X} < 16) = P\left(\frac{13-15}{0,5} < Z < \frac{16-15}{0,5}\right) = P(-4 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -4) =$

$= P(Z < 2) + P(Z < 4) - 1 = P(Z < 2) = 0,9772$

13.32. Las tallas de los jugadores de baloncesto de 16 años en España siguen una distribución normal *N*(179, 18). Se toma al azar una muestra de 100 jugadores de este tipo. Halla los límites inferior y superior del intervalo (179 – *k*, 179 + *k*) para que la media de muestra elegida esté en ese intervalo con una seguridad del 90%.

$$\bar{X} = N\left(179, \frac{18}{\sqrt{100}}\right) = N(179; 1,8)$$

$$P(179 - k < \bar{X} < 179 + k) = P\left(\frac{179 - k + 179}{1,8} < Z < \frac{179 + k - 179}{1,8}\right) = 0,9$$

$$P\left(-\frac{k}{1,8} < Z < \frac{k}{1,8}\right) = 2P\left(Z < \frac{k}{1,8}\right) - 1 = 0,9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k}{1,8}\right) = \frac{1,9}{2} = 0,95 \Rightarrow \frac{k}{1,8} = 1,645 \text{ ; } k = 2,961$$

$$I = (179 - 2,961 \text{ ; } 179 + 2,961) = (176,039 \text{ ; } 181,961)$$

Inferencia Estadística.

1. Muestras

Población estadística es un conjunto de cuyos elementos queremos obtener una información determinada.

Muestra es un subconjunto representativo de la población que elegimos para realizar un estudio estadístico.

Las técnicas que utilizamos para elegir una muestra se llaman **muestreo**. Los tipos más usuales de muestreo son:

Muestreo aleatorio simple (m.a.s.)

Los elementos de la muestra se eligen al azar, teniendo todos la misma probabilidad de ser elegidos. Los muestreos pueden ser con o sin repetición.

Muestreo sistemático

Si queremos obtener una muestra de tamaño n, en una población de tamaño N, procederemos así:

Se ordenan y numeran los elementos de la población. El primer elemento de la muestra , llamado origen, se obtiene al azar entre los valores: 1, 2, ... , h = $\frac{N}{n}$. Los demás valores se obtienen sumando al primer elemento un número fijo, llamado salto.

Muestreo estratificado

Se divide la población en clases homogéneas, llamadas **estratos**, y en cada una de ellos se determinan los elementos de la muestra (normalmente al azar y de forma proporcional al tamaño de cada estrato).

Muestreo por conglomerados o áreas

Se suele utilizar en poblaciones que son homogéneas. Se divide la población en distintas secciones o **conglomerados**, se eligen al azar una o varias de estas secciones y se forma la muestra con todos los elementos de las secciones elegidas.

2. Distribución muestral de medias.

Tenemos una población, de la que conocemos su media μ y su desviación típica σ. Llamemos M_i a una muestra de tamaño n obtenida de la población dada, y sea X_i la media aritmética de la característica que estamos estudiando, en la muestra M_i.

Si extraemos todas las muestras de tamaño n de nuestra población y calculamos sus medias aritméticas obtenemos un conjunto $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ que se llama **distribución muestral de medias**, que representaremos por $\overline{X}$.

Se demuestra que si la población de partida es normal, o n es lo suficientemente grande $(n \geq 30)$, también es normal la distribución de medias, siendo sus parámetros

- $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

OBSERVACIÓNES:

1) Si la población de partida no es normal y n es pequeño (n < 30), la distribución de muestras no es normal y su estudio queda fuera de los objetivos de este curso.
2) Si no conocemos la desviación típica de la población, σ, podemos realizar un cálculo aproximado de su valor $\dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$ (donde S es la desviación típica de la muestra, que se puede calcular si es necesario)

3. Distribución muestral de proporciones.-

En una población dada la proporción de individuos que tienen una determinada característica, C, es p_0. Llamemos M_i a una muestra de tamaño n obtenida de la población dada, y llamemos p_i a la proporción de elementos de esta muestra que tienen la característica C. Si extraemos todas las muestras de tamaño n de nuestra población y en cada una de ellas estudiamos la proporción de elementos que tienen la característica C, obtenemos un conjunto $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ que se llama **distribución muestral de proporciones**, que representaremos por $\hat{P}$.

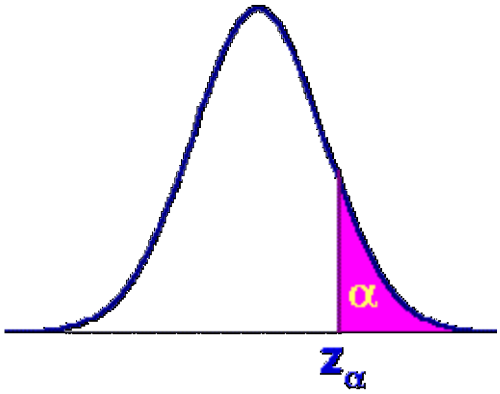
Se demuestra que, si n es suficientemente grande y p_0 no se aproxima a 0 ó a 1, la distribución muestral de proporciones se distribuye normalmente, siendo sus parámetros:

- $\mu_{\hat{p}} = p_0$
- $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}$

OBSERVACIÓN:

Si n es pequeño, o p_0 tiene un valor próximo a 0 ó a 1, la distribución muestral de proporciones no es normal y su estudio queda fuera de los objetivos de este curso.

4. Intervalos de confianza.-



En una distribución normal, $N(\mu,\sigma)$, hemos fijado de antemano una probabilidad p, y queremos encontrar un intervalo tal que la probabilidad de que cualquier elemento de la distribución dada esté incluida en dicho intervalo sea igual a p.

La probabilidad p se llama **nivel de confianza**.

El intervalo que buscamos se llama **intervalo de confianza**.

La probabilidad de que un elemento de la distribución que esté fuera del intervalo de confianza se llama **nivel de significación**, o de **riesgo**, y se suele representar por α.

Entre ambos niveles, de confianza y de significación, existe la siguiente relación:

$p = 1-\alpha$ (ya que, evidentemente, $p+\alpha = 1$).

Durante este tema podemos necesitar hallar tres tipos de intervalos de confianza:

INTERVALOS BILATERALES:

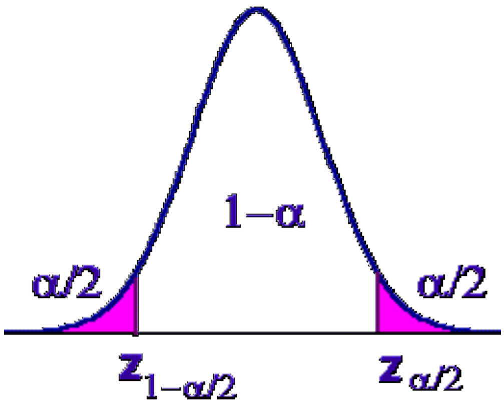
Con la tabla de la distribución normal $N(0,1)$ buscamos aquel z tal que F (z) = $1-\frac{\alpha}{2}$. Este z se suele escribir de la forma $z_{\alpha/2}$, y se suele llamar **valor crítico**. Por tanto nuestro intervalo de confianza es (- $z_{\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$).]

Si estamos en una distribución normal $N(\mu,\sigma)$, sabemos que $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ y por tanto $x = \mu + \sigma.z$. Así pues el intervalo de confianza es: $\left(\mu - \sigma.z_{\alpha/2}, \mu + \sigma.z_{\alpha/2}\right)$

INTERVALOS UNILATERALES DE LA FORMA $(-\infty, x_\alpha)$:

En una distribución $N(0,1)$ buscamos aquel z_α para el que se verifica F (z_α) = $1-\alpha$, el intervalo de confianza es $(-\infty, z_\alpha)$. En una distribución $N(\mu,\sigma)$ sabemos que $x_\alpha = \mu + \sigma.z_\alpha$, luego el intervalo de confianza es: $(-\infty, \mu + \sigma.z_\alpha)$.

INTERVALOS UNILATERALES DE LA FORMA $(-x_\alpha, +\infty)$:



En una distribución $N(0,1)$ buscamos aquel z_α para el que se verifica F (z_α) = $1-\alpha$, y por simetría el valor buscado es - z_α. Por tanto el intervalo es: $(-z_\alpha, +\infty)$. En una distribución $N(\mu,\sigma)$ sabemos que $-x_\alpha = \mu - \sigma.z_\alpha$, luego el intervalo de confianza es: $(\mu - \sigma.z_\alpha, +\infty)$.

Podemos trabajar con cualquier nivel de confianza pero, en el caso de intervalos bilaterales, los más frecuentes son:

Nivel de confianza $(p = 1-\alpha)$	**Nivel de significación** (α)	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
0´90	0´10	0´05	1´645
0´95	0´05	0´025	1´96
0´99	0´01	0´005	2´575

4.2. Intervalos de confianza para una distribución de medias.

Sabemos que si una distribución , X, es normal, o n es suficientemente grande $(n \geq 30)$ la distribución de medias de tamaño n, $\overline{X}$, es una distribución normal del tipo $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Aplicando los resultados obtenidos en el apartado anterior obtenemos los siguientes intervalos de confianza:

Intervalos bilaterales: $\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.z_{\alpha/2}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Unilaterales superiores: $\left(-\infty, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.z_{\alpha}\right)$.

Unilaterales inferiores: $\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.z_{\alpha}, +\infty\right)$.

<u>OBSERVACIÓN</u>: Si elegimos una muestra de tamaño n, la probabilidad de que su media, X_i, esté incluida en el intervalo de confianza es p.

4.2. Intervalos de confianza para una distribución de proporciones.

Sabemos que, si n es suficientemente grande y p_0 no está próximo a 0 ó a 1, la distribución muestral de proporciones, $\hat{P}$, es una distribución normal del tipo $N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.

Aplicando los resultados obtenidos anteriormente obtenemos los siguientes intervalos de confianza:

Intervalos centrales: $\left(p_0 - \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}.z_{\alpha/2}, p_0 + \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}.z_{\alpha/2}\right)$.

Unilaterales superiores: $\left(-\infty, p_0 + \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}.z_{\alpha}\right)$.

Unilaterales inferiores: $\left(p_0 - \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}.z_\alpha, +\infty\right)$.

OBSERVACIÓN: Si elegimos una muestra de tamaño n, la probabilidad de que la proporción de elementos de esta muestra que tienen la característica C, p_i, esté incluida en el intervalo de confianza es p.

5. Relación entre el nivel de confianza, el error y el tamaño de una muestra.

El error máximo que podemos cometer al realizar un contraste de hipótesis bilateral es la distancia que hay del centro del intervalo a sus extremos, es decir el **radio del intervalo:**

$$radio = d\left(\mu, \mu \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left|\left(\mu \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \mu\right| = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Por tanto:

a) En la estimación de una media es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

b) En la estimación de una proporción es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$