Funciones

1. Escribe las propiedades de los logaritmos.
2. Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2+4}\ ;\quad g(x)=3^{\sqrt{9-x^2}}-6\ ;\quad h(x)=\frac{2x-4}{x+3};\quad k(x)=\ln(x+6)$$

a) Determina su campo de definición o dominio.

b) Calcula las funciones inversas de $h(x)$ y $k(x)$.

c) Halla las siguientes composiciones, así como sus dominios correspondientes:

$(f\circ h)(x)$; $(h\circ f)(x)$; $(k\circ f)(x)$; $(k\circ g)(x)$

3. Una empresa vende ordenadores de una determinada marca de tal manera que el número de ordenadores vendidos en el año *x* viene dado por la función $f(x)=500+4x+\frac{1}{2}x^2$, donde $x=0$ corresponde al año 2005. a) ¿Qué representa $f(0)$? b) Encuentra el número de ordenadores vendidos en 2007 y en 2009.
4. La gráfica de la función $f(x)=k\cdot a^x$ pasa por los puntos $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(1,\frac{17}{10}\right)$; calcula los valores de *k* y *a*.
5. Dada la función, definida a trozos , $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-4} & si\ \ x\le 1\\ \log(x+3) & si\ \ x>1\end{cases}$,

a) Calcula su dominio o campo de definición.

b) Calcula los valores que toma para $x=2$; $x=-4$; $x=0$;

6. Representa gráficamente las funciones $a)\ f(x)=E[x/2]$; $b)\ f(x)=x-sig(x)$; $c)\ f(x)=|x|$
7. Dada la función $f(x)=\frac{1}{1+x}$, calcula: $a)\ f^{-1}(x)$ $\ b)\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ $\ c)\ (f\circ f)(x)$; $d)\ D(f\circ f)$

¿Existe $(f\circ f)(-1)$?

8. Encuentra una función $g(x)$, tal que $(f\circ g)(x)=x$, siendo $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$. Comprueba que también se verifica $(g\circ f)(x)=x$
9. Escribe las siguientes funciones como composición de funciones elementales:

$$A(x)=(5x-2)^3+3\ ;\ B(x)=\cos\left(\sqrt{e^{x-1}}\right);\ C(x)=\log\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$$

10. Las pérdidas o ganancias de una empresa en función de los años de vida de la misma, vienen dadas por la expresión: $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+2}$ (*x* = número de años).

Halla el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

¿Están limitados sus beneficios? ¿Cuál es su límite?

11. El índice de audiencia (evaluado en una escala de 0 a 10) de cierto programa de televisión de 30 minutos de duración se comporta de acuerdo con la siguiente función: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $0 \le x \le 30$, $(A \ne 0)$ donde A, B y C son constantes a determinar.

12. Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar el programa se alcanza el índice de audiencia 10 y que el programa se inicia con un índice de audiencia de 6, se pide:
a) Determinar las constantes A, B y C. Justifica la respuesta.
b) Representar la función obtenida.

13. Una compañía petrolífera paga al propietario de un terreno 30 000€ por el derecho a perforar para extraer gas natural. Además le paga 60€ por cada mil m^3 de gas extraído. a) Expresa la cantidad de dinero que recibirá el propietario en función de la cantidad de gas natural extraído. b) ¿Cuál es el dominio o campo de definición de esta función?

14. Un rectángulo tiene 100 cm de perímetro. Expresa su área, A, como una función de *x*, siendo *x* la medida de uno de sus lados. ¿Cuál es el dominio de esta función?

15. Una caja ortoédrica de sección cuadrada de lado *x* tiene un área total de 100 cm^2. Expresa el volumen, V, como función de *x*. ¿Cuál es su dominio?

16. Representa gráficamente la función $f(x) = |1-x| + |x|$.

17. Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & si\, x < 0 \\ \sqrt{x} & si\, x \ge 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} |x| & si\, x < 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\, x \ge 2 \end{cases}$

Calcula las funciones $(f+g)(x)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, así como sus respectivos dominios.

18. Un fondo de inversión genera una rentabilidad que depende de la cantidad de dinero invertido según la fórmula $f(x) = -0.02x^2 + 0.8x - 5$, donde $f(x)$ representa la rentabilidad generada cuando se invierte la cantidad *x* (en miles de euros). Determinar justificando las respuestas:
a) ¿Cuánto dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad posible?
b) ¿Cuál será el valor de dicha rentabilidad máxima?

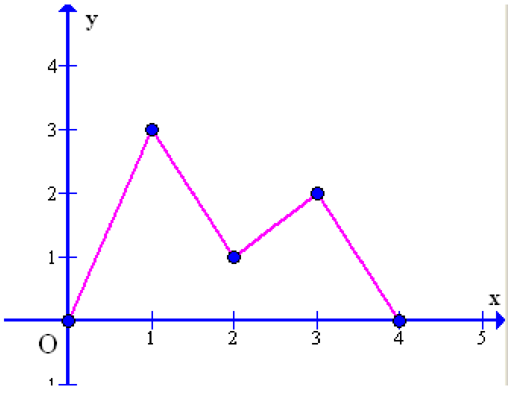
19. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función

$$f(t) = \frac{12 + t^2}{(t+1)^2}$$ donde *t=0* se corresponde con el año 2000.

a) ¿Cuántos habitantes había en el año 2000?
b) ¿Cuántos habitantes formaban la población en el año 2004?
c) ¿Cuál será el tamaño de la población a largo plazo?

20. En la figura se muestra la gráfica de la función *f* de domino el intervalo $[0,4]$.

Dibuja la gráfica de las funciones
$a)\ y = f(x-1)$; $b)\ y = f(x+3)$; $c)\ y = 2\cdot f(x) - 3$



LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-7x^2+2}{x^3-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-5x^2}{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x+1}{x^3-3x^2-2}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-2}\right)^{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{4}\cdot\dfrac{x-5}{x^2}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-4x^3+8x^2-1}{3x^3+2}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{3x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x^2+3}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$ l) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{7x^2+6x^5}$ n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x}{6x+5}$ o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$ p) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)(x+3)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2+3x}$ r) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^4-81}$ s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^5}{x^2-16}$ t) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2}$

u) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-2x^3-x+3}{4x^3+6x-1}$ v) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$ w) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)$ x) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x}{x+2}$

y) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ z) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12}$ aa) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ ab) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-1}{x-2}$

ac) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-4x}$ ad) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$ ae) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4-3x^2+7x}{x^4+8x}$ af) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^2-4}$

ag) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$ ah) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x}{x+2}$ ai) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$ aj) $\lim\limits_{x\to \infty}5^{\frac{x^2-2}{x+3}}$

ak) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-3}}$ al) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{2x}\right)^{x+2}$ am) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$ an) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$

ao) $\lim\limits_{x\to \infty}(3-x)^{2-x}$ ap) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-5x+6}\right)$ aq) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)^{1-x}$ ar) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{x-1}{x-3}}$

as) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ at) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}\right)$ au) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x-4}$ av) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x-5}{x^2-4x}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

Soluciones:

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 0 d) 0 e) e^{11} f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{-4}{3}$ h) $\frac{-1}{3}$ i) $\frac{1}{7}$ j) $\frac{-1}{2}$ k) 0 l) -8

m) $\frac{6}{13}$ n) $\frac{21}{23}$ o) $\frac{5}{7}$ p) 0 q) $\frac{-1}{3}$ r) $\frac{1}{4}$ s) 0 t) 2 u) $\frac{-1}{2}$ v) 3 w) 0 x) $+\infty$

y) ∞ z) $\frac{3}{5}$ aa) -1 ab) $\frac{4}{3}$ ac) $\frac{1}{8}$ ad) 0 ae) 1 af) $\frac{-5}{2}$ ag) 0 ah) $+\infty$ ai) -1 aj) $+\infty$

ak) 1 al) 0 am) $e^{-1/20}$ an) 1 ao) 0 ap) $\nexists$ aq) 1 ar) e^2 as) $\frac{1}{4}$ at) 1 au) e^3 av) $\nexists$

Límites y Continuidad de funciones

1. Calcula el dominio de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+2} & si\ x<0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+4} & si\ x>0\end{cases}$$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-2}}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2}\right)^{1/x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x-3x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{2x+x^2}\right)^{3x+2}$

3. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$

4. Determina el valor de m para que la siguiente función sea continua en todos los puntos de su dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Lx}{x-1} & si\ x\neq 1\\ m & si\ x=1\end{cases}\qquad\qquad Sol:\ m=1$$

5. Dada la función: $f(x)=\begin{cases}e^{2x} & si\ x<0\\ x^2+a & si\ 0\leq x\leq 3\\ \dfrac{x+5}{x-3} & si\ x>3\end{cases}$

Determina el valor del parámetro *a* para que *f*(*x*) sea continua en $x=0$. ¿Es continua en $x=3$?

6. Las pérdidas o ganancias de una empresa en función de los años de vida de la misma, vienen dadas por la expresión : $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+2}$

Halla el año en que la empresa deja de tener pérdidas.
¿Están limitados sus beneficios? ¿Cuál es su límite?

7. Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{x^3-1}$ b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{x}$

c) $f(x)=\begin{cases}2^x & si\ x<0\\ x^2+1 & si\ x\geq 0\end{cases}$ d) $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

8. Un municipio ofrece dos posibilidades para facturar el agua consumida. En la primera, se facturan 40 m^3 a 0,5€/m^3, en concepto de alquiler de contador. En la segunda modalidad se paga una cantidad fija de 11€ y el metro cúbico consumido se factura a 0,35€. Determina a qué tipo de facturación le interesa acogerse al usuario, en función del consumo.

“Las matemáticas son una gimnasia del espíritu y una preparación para la filósofia.”

Isócrates (436 AC-338 AC) Orador ateniense.

Derivadas

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=\ln 4+\sqrt{7}$ c) $f(x)=2(1+x)^{-5}$

   d) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ f) $f(x)=\left(x^2+3x\right)\cdot\left(1-2x\right)$

   g) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}-5x^2\right)^{1/2}$ h) $f(x)=\left(x^{-2}+x-1\right)^4$ i) $y=3^{x^2+x-1}$

   j) $y=e^{x^{-2}+3x}$ k) $y=\ln\dfrac{6x^2 1}{2x^2-x+1}$ l) $y=\log_3\dfrac{1}{x-2}$

   m) $y=\operatorname{sen}(1+x^2)$ n) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-x}{1+x}$ p) $y=\ln(\ln x)$

2. Calcular la derivada segunda de las siguientes funciones:

   a) $y=x\operatorname{sen}x$ b) $y=\operatorname{tg}x$ c) $y=\ln(x+1)$

   d) $y=e^{2x-1}$ e) $y=\operatorname{arctg}(1+x)$ f) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

   g) $y=\cos x$ h) $y=e^x\operatorname{sen}x$ i) $y=e^{-x^2}$

3. Calcula la derivada n-ésima de la función $f(x)=xe^x$

4. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

   a) $y=\dfrac{3}{4}+x^2, a=\dfrac{1}{2}$ b) $y=5+3x^2, a=0$ c) $y=2\sqrt{x}, a=4$ d) $y=\dfrac{3x}{1-x}, a=0$ e) $y=x^2+2x, a=1$

5. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y=x^2-7x+3$ es paralela a la recta $5x+y-3=0$?

   Solución: (1,-3)

6. Halla la recta tangente a la curva $y=1+x-x^2$ que es paralela al eje de abscisas. *Sol*: $y=\dfrac{5}{4}$

7. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -2+2x & \text{si } x>1 \end{cases}$; estudiar si es derivable en todos los puntos de su dominio. *Sol*: Es derivable en todo punto excepto en x=1.

8. La función de costes de producción de una determinada empresa es $C(x)=9x^2+108x+324$. Calcular: a) Los costes fijos y los costes variables; b) el coste marginal y el coste medio; c) el volumen de producción x para el que el marginal coincide con el coste medio.

   Sol: a) Coste fijo $C(0)=324$, coste variable: $C(x)-C(0)=9x^2+108x$; b) coste marginal $C'(x)=18x+108$; coste medio $\dfrac{C(x)}{x}=9x+108+\dfrac{324}{x}$; c) $C'(x)=\dfrac{C(x)}{x}\Leftrightarrow x=6$.

9. El coste anual, en miles de euros, que supone para una productora cinematográfica la contratación de actores secundarios para sus películas se rige por esta función:

   $$f(x)=\frac{12x^2+360x+4800}{x}\quad \text{con } x>0$$

   donde x es el número de actores secundarios contratados.

   a) ¿Cuántos actores secundarios tiene que contratar la productora para que el coste anual sea mínimo? Justifica tu respuesta.

   b) ¿A cuánto asciende este coste mínimo? Justifica tu respuesta

Derivadas I

Halla la función derivada de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $y=5x^6-6x^3+3x-8x^{-2}+4x^{-5}+9 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=30x^5-18x^2+3+16x^{-3}-20x^{-6}$

2) $y=\left(3x^4+2x^3-1\right)^5 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=30x^2\left(2x+1\right)\left(3x^4+2x^3-1\right)^4$

3) $y=\dfrac{x^2+4}{\left(3x^2-2\right)^4} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-\dfrac{2x\left(9x^2+50\right)}{\left(3x^2-2\right)^5}$

4) $y=\dfrac{1}{2x^4}-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{1}{4x-3}-12 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{4}{\left(4x-3\right)^2}$

5) $y=\left(\dfrac{2x-3}{x+5}\right)^4 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{52\left(2x-3\right)^3}{\left(x+5\right)^5}$

6) $y=\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+2}\right)^7 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{63x^2\left(x^3-1\right)^6}{\left(x^3+2\right)^8}$

7) $y=\dfrac{2x-5}{\left(3x^2+1\right)^4} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-\dfrac{2\left(21x^2-60x-1\right)}{\left(3x^2+1\right)^5}$

8) $y=5^x-7\cdot 3^{-2x}+5 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=5^x\ln 5+14\cdot 3^{-2x}\ln 3$

9) $y=7^{3x^2-5x}+8x-2 \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\left(6x-5\right)\cdot 7^{3x^2-5x}\ln 7+8$

10) $y=\left(6x-5\right)\cdot e^{2x^3+3x-1} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=3\cdot e^{2x^3+3x-1}\left(12x^3-10x^2+6x-3\right)$

11) $y=\dfrac{e^{5x-1}}{x+2} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{e^{5x-1}\left(5x+9\right)}{\left(x+2\right)^2}$

12) $y=\log_3\left(4x^3-3x^2+7\right) \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{6x\left(2x-1\right)}{4x^3-3x^2+7}\log_3 e$

13) $y=\ln\sqrt{\dfrac{2x+7}{x^2+5}} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-\dfrac{x^2+7x-5}{\left(x^2+5\right)\left(2x+7\right)}$

14) $y=\dfrac{\ln(x+2)}{x+2} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{1-\ln\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2}$

15) $y=\log\left(x^2 10^{3x}\right) \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{3x+2\log e}{x}$

16) $y=\cos\left(3x^2+4\right) \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-6x\sin\left(3x^2+4\right)$

17) $y=\sin\left(5x^3-3\right) \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=15x^2\cos\left(5x^3-3\right)$

18) $y=e^{x+2}\cos x \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=e^{x+2}\left(\cos x-\sin x\right)$

19) $y=\tan\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=\dfrac{7}{\left(x+3\right)^2}\left[1+\tan^2\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)\right]$

20) $y=\dfrac{2x-5}{\left(3x^2+1\right)^4} \xrightarrow{\textit{Solución}} y'=-\dfrac{2\left(21x^2-60x-1\right)}{\left(3x^2+1\right)^5}$

Derivadas II

Calcula la función derivada de las siguientes funciones reales de variable real:

1) $y=\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $y=\left(2x^2+3\right)^4 \xrightarrow{\text{Solución}} y'=16x\left(2x^2+3\right)^3$

3) $y=\dfrac{3x-4}{\left(5x+1\right)^2} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{43-15x}{\left(5x+1\right)^3}$

4) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}$

5) $y=e^{\cos x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-e^{\cos x}\sin x$

6) $y=2^{\sqrt{x}-1} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=2^{\sqrt{x}-2}\dfrac{\ln 2}{\sqrt{x}}$

7) $y=\dfrac{\cos x}{\left(2x+3\right)^2} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-\dfrac{\left(2x+3\right)\sin x+4\cos x}{\left(2x+3\right)^3}$

8) $y=\left(5x^3-4\right)^2\cdot e^{x^3} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=3x^2\cdot e^{x^3}\left(5x^3-4\right)\left(5x^3+6\right)$

9) $y=\tan e^x \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{e^x}{\cos^2\left(e^x\right)}$

10) $y=\sqrt{\arctan x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\arctan x}}$

11) $y=\arctan\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{1}{2\left(1+x\right)\sqrt{x}}$

12) $y=\tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-\dfrac{2}{\left(1+x\right)^2\cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}$

13) $y=\dfrac{xe^x}{\sin x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{e^x\left[\left(x+1\right)\sin x-x\cos x\right]}{\sin^2 x}$

14) $y=\cos^4\left(2x^3+3\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-24x^2\cos^3\left(2x^3+3\right)\sin\left(2x^3+3\right)$

15) $y=e^{2x}\sin^2 x \xrightarrow{\text{Solución}} y'=2e^{2x}\sin x\left(\cos x+\sin x\right)$

16) $y=\arctan\left(e^x-1\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}$

17) $y=\sqrt{1-\sin x} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$

18) $y=x\cos x+\tan x \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-x\sin x$

19) $y=\ln\left(\tan x\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$

20) $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=\dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$

21) $y=\ln\left(\dfrac{7x-5}{3x^2+2}\right)^{\frac{4}{5}} \xrightarrow{\text{Solución}} y'=-\dfrac{4\left(21x^2-30x-14\right)}{5\left(7x-5\right)\left(3x^2+2\right)}$

Monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión

1. Calcula monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=x^3-4x;$ b) $f(x)=x^4-6x^2;$ c) $f(x)=3x-x^3$

   Sol: a) $M\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{9}\right),\ m\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),\ P.I.(0,\ 0);$

   b) $m\left(-\sqrt{3},-9\right),\ M(0,0),\ m\left(\sqrt{3},-9\right),\ P.I.(-1,-5),\ P.I.(1,-5)$

   c) $m(-1,-2),\ M(1,2),\ P.I.(0,0)$

2. Estudia las asíntotas, monotonía y curvatura de la función $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$. ¿presenta máximos y mínimos? ¿Y puntos de inflexión? *Sol*: A.V. x = −1; A.H. y = 0 .No presenta puntos críticos ni P.I.

3. Representa gráficamente la función $f(x)=\left|x^2-7\right|$. Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x=1. Halla sus máximos y mínimos relativos.

4. Dada la función $f(x)=2x^3+ax^2+bx-5$, halla los valores de *a* y *b* de forma que $f(x)$ tenga un máximo en x=1 y un mínimo en x=2. *Sol*: a=−9 b=12.

5. Estudia los intervalos de crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y mínimos.

   a) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1;$ b) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4};$ c) $f(x)=e^x(x^2-3x+1)$

   Sol: a) $M(-1,6);\ m(3,-26)$;b) $M(-2\sqrt{3},-3\sqrt{3});\ m(2\sqrt{3},3\sqrt{3});$

   c) $M(-1,5e^{-1}); m(2,-e^2)$

6. Sea la función $f(x)=\frac{bx}{x^2+1}$ con b un parámetro real distinto de cero.

   a) Determina las asíntotas de $f(x)$ para cualquier valor del parámetro b. *Sol* y=0.

   b) Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)$ tenga un máximo en el punto $P(1,3)$ *Sol*: b=6.

7. Halla los puntos de inflexión y estudia la concavidad de estas funciones:

   a) $f(x)=1-(2-x)^5;$ b) $f(x)=xe^{-x}$ *Sol*: a) $P.I.(2,1)$; b) $P.I.(2,2e^{-2})$

8. Halla los coeficientes *a, b, c, d* de la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión $(1,0)$ es $y=3-3x$ y que la función tiene un extremo relativo en $x=0$. *Sol*: $a=1;\ b=-3;\ c=0;\ d=2$

"La verdad anda sobre la mentira como el aceite sobre el agua".
Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616); escritor español.

Problemas de funciones

1. Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en €) viene dado por la función $f(x)=(x-2)^2(1-2x)+252x+116$ con $0\le x\le 10$.

   a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció.

   b) Si retira sus ingresos al finalizar los 10 años, ¿cuánto dinero pierde por no haberlo hecho en el momento óptimo?

2. Los beneficios diarios de una fábrica, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x)=-x^2+24x-100$, donde x indica el número de unidades que se producen al día.

   a) Calcula el número de unidades que han de producirse diariamente para obtener el máximo beneficio.

   b) Calcula el máximo beneficio que puede obtenerse en un día.

3. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal del tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical 30 €. Calcular:

   a. Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

   b. El coste del marco.

   Sol: a) $x=3$; $y=2$; b) $6\cdot 20+4\cdot 30=240€$

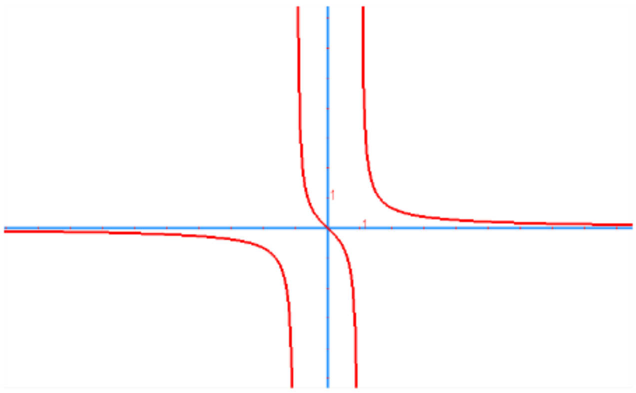
4. Estudiar la monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de la gráfica $y=x^3-3x^2+3x+2$.Calcular la tangente a la curva $y=x^2-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

5. Calcula la primera y segunda derivada de la función logística: $y=h+\dfrac{k}{e^{b-ax}}$

6. El propietario de un inmueble tiene alquilados los cuarenta pisos del mismo a 180€ al mes cada uno. Por cada 6€ de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?

   Sol: $B(x)=(180+6x)(40-x)$

7. La gráfica correspondiente a la primera derivada de una cierta función $f(x)$, es la ilustrada al margen. Determina los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.



8. Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

   Solución: $x=15$; $y=10$

9. Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, determina los valores de *a*, *b* y *c* para que $f(x)$ presente un punto de inflexión en el punto $P(-1,-1)$ y tenga dos extremos relativos en $x=-4$ y $x=2$. ¿De qué tipo de extremos se trata?

"El trabajo del pensamiento se parece a la perforación de un pozo: el agua es turbia al principio, más luego se clarifica".

Proverbio chino

Problemas de Optimización

1. Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo. *Solución*: $x=15$; $y=10$
2. Halla el triángulo rectángulo de superficie máxima entre todos los que tienen 10 cm. de hipotenusa.
   Sol: $c_1=c_2=5\cdot\sqrt{2}$ cm.
3. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal del tramo horizontal cuesta 12 € y el tramo vertical 18 €. Calcular:
   a) Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
   b) El coste del marco.

   Sol: a) $x=3$; $y=2$; b) $6\cdot 12+4\cdot 18=144€$
4. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. *Sol*: 5 cm. y 10 cm.
5. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible. *Sol*: $x=5$; $y=4$
6. A cada segmento de longitud *x* se le hace corresponder un rectángulo de base *x* y perímetro 12 cm. Hallar la función que expresa el área del rectángulo según el valor del segmento *x*. ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Para qué valor de *x* es máxima el área? *Sol*: El área máxima se alcanza para $x=3$
7. Hallar los puntos de la curva $y=3x^4-4x^3$ cuya recta tangente sea paralela al eje OX. ¿cuáles de esos puntos no son ni máximos ni mínimos?
8. Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $y=x^3-3x+2$. Halla también sus máximos y mínimos.
9. Estudiar la monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión de la gráfica $y=x^3-3x^2+3x+2$.
10. El propietario de un inmueble tiene alquilados los cuarenta pisos del mismo a 180€ al mes cada uno. Por cada 6€ de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficios produce al propietario?
    Sol: $B(x)=(180+6x)(40-x)$
11. El coste anual, en miles de euros, que supone para una productora cinematográfica la contratación de actores secundarios para sus películas se rige por la función:

$$f(x)=\frac{12x^2+360x+4800}{x} \text{ con } x>0,$$

donde *x* es el número de actores secundarios contratados.

   a) ¿Cuántos actores secundarios tiene que contratar la productora para que el coste anual sea mínimo? Justifica tu respuesta.
   b) ¿A cuánto asciende este coste mínimo? Justifica tu respuesta.

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida."

John Von Neumann

Ejercicios y problemas de Probabilidad

1. En una ciudad se publican tres periódicos *A*, *B* y *C*. Según un estudio realizado se estima que de la población adulta el 25% lee *A*, el 33% *B*, el 39% *C*, el 6% *A* y *B*, el 8% *B* y *C*, el 7% *A* y *C*, y el 1% *A*, *B* y *C*. ¿Qué porcentaje de adultos no leen ningún periódico?, ¿cuántos leen solamente un periódico?, ¿cuántos leen exactamente dos periódicos?, ¿cuántos leen *A* pero no leen *C*?, ¿cuántos leen *A* o *B*?

Solución:

$P(\text{no leen}) = 0{,}23 \quad P(\text{leen }1) = 0{,}58 \quad P(\text{leen }2) = 0{,}18 \quad P(A \cap C^c) = 0{,}18 \quad P(A \cup B) = 0{,}52$

2. ¿Puede existir una probabilidad *P* definida en el espacio muestral $E = \{A, B, C\}$ que verifique $P(A) = P(B) - P(C)$ y $P(C) = 3P(B)$?

3. Sea *P* una probabilidad definida en $E = \{A, B, C\}$. Halla $P(A)$ siendo $2P(B) = P(A)$ y $P(C) = P(B)$. *Sol*: $P(A) = \dfrac{1}{2}$

4. Se tienen dos sucesos *A* y *B* tales que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}75$ y $P(A \cup B) = 0{,}875$. ¿Son *A* y *B* sucesos incompatibles? ¿Y sucesos independientes?

   Solución: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}375 > 0 \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$ luego son compatibles. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}375$ Los sucesos son independientes

5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a 8 al lanzar dos dados cúbicos? *Sol*: $5/36$

6. Se consideran 8 números, cuatro de ellos positivos y cuatro negativos. Elegimos dos de ellos al azar y los multiplicamos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número positivo? *Sol*: $3/7$

7. Elvira se sabe 18 unidades de las 22 de que consta el libro de Geografía. En un examen, por medio de bolas, se eligen dos unidades al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa los dos? *Sol*: 0,66234

8. Sean A y B sucesos independientes, prueba que $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$.

Solución:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot [1 - P(B)] + P(B) =$$
$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) + 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{B}) \cdot [1 - P(A)] = 1 - P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

9. En cierta región se ha hecho un estudio sobre el carácter daltónico de las personas y se ha encontrado que 8 de cada 1000 hombres y una de cada 500 mujeres padece daltonismo. Se elige una persona al azar y se sabe que presenta daltonismo. ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una mujer? ¿Y de que se trate de un hombre?

Sol: $P(M / D) = 0{,}2$; $P(H / D) = 0{,}8$

10. Si A y B son dos de los posibles sucesos que pueden presentarse en un experimento aleatorio, calcular, en función de las probabilidades $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$, los siguientes sucesos:

    C={no se presenta ninguno de los sucesos A y B}; D={se presenta exactamente uno de los sucesos A o B}.

Solución: $P(C) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B) \quad P(D) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

Ejercicios y problemas de Probabilidad

1. Sean $A=\{3,6,9\}$ y $B=\{2,3,5,7\}$ dos sucesos de un espacio muestral E. Comprueba que

   $a)\ \left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap\overline{B}$; $b)\ \left(\overline{A\cap B}\right)=\overline{A}\cup\overline{B}$; $c)\ A\cup(A\cap B)=A$; $d)\ A\cap(A\cup B)=A$

2. Se tienen tres recipientes A, B y C. El recipiente A contiene 3 galletas de vainilla y 2 de chocolate, el B contiene 3 de chocolate y 2 de vainilla, y el C contiene 2 de vainilla y 1 de chocolate. Se elige un recipiente al azar y se coge una galleta también al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de chocolate?

   Solución: $P(g=Ch)=4/9$

3. Sea P una probabilidad definida en $E=\{A,B,C\}$. Halla $P(A)$ siendo $P(B)=2P(A)$ y $P(C)=P(B)$. *Sol*: $P(A)=1/5$

4. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=0,5$; $P(B)=0,4$ y $P(A\cap B)=0,2$. Calcula:

   $a)\ P(A\cup B)$; $b)\ P(A-B)$; $c)\ P(B-A)$; $d)\ P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$; $e)\ P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$; $f)\ P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)$

5. Una caja contiene 10 bolas blancas, 5 negras y 5 rojas. Se extraen dos bolas consecutivamente de la caja. Calcula la probabilidad de que las dos sean blancas si:

   a) La extracción se hace con reemplazamiento.
   b) La extracción se hace sin reemplazamiento.

   Solución: $a)\ P(b)=1/4$; $b)\ P(b)=9/38$

6. ¿Cómo deben distribuirse dos bolas blancas y 2 bolas negras en dos urnas para que al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola también al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca? (La única condición es que cada urna tenga al menos una bola).

   Solución: Una bola blanca en una urna y el resto en la otra urna.

7. En un dado trucado, la probabilidad de que aparezca un número par es doble que la de aparecer número impar. Calcula:

   a) Probabilidad de que salga el número 1; b) Probabilidad de que salga un número impar; c) Probabilidad de que salga el número 4; d) Probabilidad de que salga un número par.

8. Sean A y B sucesos independientes, prueba que $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$.

9. Dados los sucesos A y B, sabemos que $P(A\cap B)=0,1;$ $P(A\cup B)=0,7$ y $P(A/B)=0,2$.

   a) Calcula $P(A)$; $P(B)$ y $P\left(\overline{A}\cup B\right)$

   b) ¿Son independientes los sucesos A y B?

   Sol: $P(A)=0,3;$ $P(B)=0,5$ No son independientes

10. Sean A y B dos sucesos, tales que: $P(A)=1/4; P(B)=1/3$ y $P(A\cup B)=1/2$

    ¿Son A y B sucesos independientes? Calcula $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$ *Sol*: Sí. $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=3/4$

Probabilidad

1. Dos laboratorios *A* y *B*, que trabajan para una misma firma comercial, fabrican medicamentos que presentan algún defecto con probabilidades del 1 por mil y del 3 por mil respectivamente. Un hospital se abastece de medicamentos que provienen el 70% del laboratorio *A* y el 30% del laboratorio *B*. En una investigación realizada en el hospital se observa un medicamento y resultó ser defectuoso. ¿Qué probabilidad hay de que provenga del laboratorio *A*? *Solución*: $P(A/D) = 43{,}75\%$.

2. Por los síntomas observados a un enfermo se deduce que puede tener la enfermedad *A* con un 25% de probabilidad, la *B* con un 50%, la *C* con un 20% y la *D* con un 5%. Para precisar el diagnóstico se le somete a una prueba que da positiva en el 5% de los enfermos *A*, en el 10% de los enfermos de *B*, en el 15% de los enfermos de *C* y en el 99% de los enfermos de *D*. Si el resultado de la prueba fue positivo, ¿qué probabilidades tienen cada una de las enfermedades?, ¿cuál diagnosticaría?

   Solución: $P(A/+) = 8{,}8\%$; $P(B/+) = 35{,}21\%$; $P(C/+) = 21{,}13\%$; $P(D/+) = 34{,}86\%$

   Lo más probable es que tenga la enfermedad *B* y luego la D.

3. Un autobús recorre diariamente el trayecto de ida y vuelta entre dos ciudades. La probabilidad de que ocurra un accidente en un día con lluvia es de 0,002 y la probabilidad de accidente en un día sin lluvia es de 0,0003. Un mes de septiembre tuvo 20 días con lluvia y 10 días sin lluvia. a) Si se sabe que en ese mes ocurrió un accidente, ¿cuál es la probabilidad de que se tratara de un día con lluvia? b) Si se sabe que el 10 de septiembre el autobús no tuvo ningún accidente, ¿cuál es la probabilidad de que ese día haya llovido?

   Solución: a) $P(LL/A) = 92{,}6\%$; b) $P(LL/\overline{A}) = 66{,}63\%$

4. Sean A y B dos sucesos tales que las probabilidades $P(A) = a$; $P(B) = b$; $P(A \cap B) = c$ son conocidas. Obtener en función de *a*, *b* y *c* los valores de: a) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$; b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$; c) $P(\overline{A} \cup B)$

5. Supongamos que el 5% de todos los hombres y el 0,25% de todas las mujeres son daltónicos. Una persona escogida al azar resulta ser daltónica. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona sea un hombre? (Se considera que la cantidad de hombres y mujeres es igual). *Sol*: $20/21$

6. Una persona tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces a lo sumo. Cada apuesta es de 6€. Empieza a jugar con 6€ y dejará de jugar cuando pierda los 6€ o tenga 18€. Halla el espacio muestral de los resultados posibles y calcula la probabilidad de cada uno de ellos

   Sol: Puesto que no se dice lo contrario, se supone que la probabilidad de ganar y perder es la misma, por tanto: $P(GG) = \frac{1}{4}$ $P(GPGG) = \frac{1}{16}$ $P(GPGPG) = \frac{1}{32}$ $P(GPGPP) = \frac{1}{32}$ $P(GPP) = \frac{1}{8}$ $P(P) = \frac{1}{2}$

7. Un laboratorio lanza al mercado una vacuna para combatir una determinada enfermedad. Se sabe que el 85% de la población infantil se ha vacunado contra ella. Aparece una epidemia que afecta al 10% de la población infantil y se comprueba que el 90% de los niños que padecen la enfermedad no fueron vacunados. ¿Cuál es la probabilidad de padecer la enfermedad habiendo sido vacunado? *Solución*: $P(Enf/V) = 1{,}18\%$.

8. Una urna contiene 2 bolas blancas y 4 negras. Otra contiene 3 bolas blancas y 1 negra. Dos bolas pasan de la primera urna a la segunda. Hallar la probabilidad de que la bola extraída de la segunda urna, después de pasar a ella dos bolas de la primera, sea blanca. *Sol*: $11/18$

9. Demostrar que los sucesos *A* y $\overline{B}$ son independientes si son independientes los sucesos *A* y *B*.

La mitad de nuestras equivocaciones nacen de que cuando debemos pensar, sentimos, y cuando debemos sentir, pensamos.

Proverbio inglés

Distribución Binomial

1. Un jugador lanza 3 monedas. Recibe 3€ si salen 3 caras, 0,6€ si salen 2 caras y nada con cualquier otra combinación. ¿Cuál debería ser el precio de la apuesta para que el juego fuese justo?
2. Una empresa ha de decidirse entre tres opciones: Opción A: Ganar 10.000€ con probabilidad 0,6 o perder 3.000€ con probabilidad 0,4. Opción B: Ganar 6.000€ con probabilidad 0,6 o perder 3.000€ con probabilidad 0,3. Opción C: Ganar 8.000€ con probabilidad 0,7 o perder 4.000 con probabilidad 0,3. ¿Cuál es la opción que tiene una ganancia esperada más alta? *Sol*: La opción A.
3. En una fábrica de relés eléctricos se quiere establecer un sistema de control de calidad. Para ello se extrae una muestra cada hora y, si presenta alguna pieza defectuosa, detienen la fabricación. Determinar cuántos elementos debe tener la muestra para que se ordene parar la producción en el 90% de los casos, si se llega al 5% de relés defectuosos. *Sol*: $n = 45$
4. En una urna hay 50 bolas, 15 verdes y el resto blancas. Se elige una bola al azar, se anota su color, se devuelve a la urna y se repite el proceso 20 veces. Calcula el número medio de bolas verdes que se obtendrán, así como su desviación típica. *Solución*: $\mu = 6$; $\sigma = 2,0494$
5. Calcula la probabilidad de obtener, por lo menos, un 5 al lanzar 6 dados. *Sol*: 0,665.
6. La probabilidad de que cierto jugador de baloncesto enceste una canasta de 3 puntos es de 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste exactamente dos canastas de cinco lanzamientos?
7. En una asociación juvenil, el 30% de los socios juegan al baloncesto. En un momento dado tratan de reunir gente para formar un equipo, por lo que preguntan a un grupo de 10 socios si practican dicho deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos o más personas que jueguen al baloncesto? ¿Cuántos socios de ese grupo se espera que lo practiquen? *Sol*: 0,851; 3
8. Un agente de seguros vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. Según estudios anteriores, la probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es 2/3. Halla la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan: a) Cinco personas; b) Al menos tres personas; c) Exactamente dos personas. *Sol*: 0,13; 0,79; 0,16
9. Una moneda trucada, tiene una probabilidad del 60% de salir cara cada vez que es lanzada al azar. Si se lanza 10 veces, calcula las probabilidades de obtener: a) no más de cuatro caras; b) más de tres pero menos de siete caras; c) más de cinco caras.
10. El 20% de las piezas producidas por una máquina son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre cuatro piezas elegidas al azar haya como máximo dos defectuosas?
11. La opinión que tiene la población sobre la gestión de su alcalde es favorable en un 30% de los casos y desfavorable en el resto. Elegidas ocho personas de la población, halla:
    a) La probabilidad de que exactamente tres la consideren favorable.
    b) La probabilidad de que alguno la considere favorable.
12. Advertimos a un amigo de que, dada su forma de vida, cada mes tiene una probabilidad de 0,8 de contagiarse con cierto virus. Este amigo quiere averiguar cuál es la probabilidad de no contagiarse en tres meses, en seis meses y en un año. Calcula razonadamente esas posibilidades.
13. La proporción de camisas defectuosas producidas en una fábrica es del 5%. Si las camisas se empaquetan en cajas de 10 unidades, ¿qué proporción de cajas tendrán menos de 3 camisas defectuosas?

Todo lo que se ignora, se desprecia.

Antonio Machado (1875-1939)

Ejercicios de Binomial y Normal

1. Se toman cada día, durante un período de 20 días, 10 piezas de la producción de una fábrica, encontrándose esta distribución del número diario de piezas defectuosas:

Nº de piezas defectuosas	0	1	2	3
Días	13	5	1	1

a) Suponiendo que la probabilidad de obtener pieza defectuosa se mantiene fija, ajustar una distribución binomial a los datos. *Sol*: $B(10\ ;\ 0,05)$.

b) En el supuesto binomial anterior, hallar la probabilidad de que un día haya en la muestra 4 o más piezas defectuosas. *Sol*: 0.0011

2. En una distribución N(173, 6) halla las siguientes probabilidades:
a) $P(X \le 173)$; b) $P(X \ge 180{,}5)$; c) $P(161 \le X < 180{,}5)$; d) $P(172 < X < 174)$

3. Sea X una variable aleatoria continua N(0, 1), determina el valor de k en los siguientes casos:
a) $P(X < k) = 0{,}85$; b) $P(-k < X \le k) = 0{,}9$; c) $P(X \ge k) = 0{,}36$

4. Las notas en un cierto examen se distribuyen normalmente con media 5,3 y desviación típica 2,4. Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota: a) superior a 7; b) inferior a 5; c) comprendida entre 5 y 7. *Sol*: a) 0,2177; b) 0,4512; c) 0,3311

5. En una urna hay 50 bolas, 20 azules y el resto blancas. Se elige una bola al azar, se anota su color, se devuelve a la urna y se repite el proceso 7 veces. Calcula las siguientes probabilidades:
a) ha habido cinco extracciones de color blanco; b) el color blanco no ha aparecido más de dos veces; c) ha habido cuatro extracciones blancas y dos verdes; d) ninguna extracción es blanca.

6. Las notas de un examen de Historia han tenido una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 1; mientras que en un examen de Matemáticas la media ha sido 6 y la desviación típica 1,25. Un alumno ha sacado un 8 en Historia y otro 8 en Matemáticas; tipifica ambas notas, ¿en qué asignatura consideras que ha obtenido mejor rendimiento?

Solución: $Z_H = \dfrac{8-\mu_H}{\sigma_H} = \dfrac{8-6{,}5}{1} = 1{,}50; \quad Z_M = \dfrac{8-\mu_M}{\sigma_M} = \dfrac{8-6}{1{,}25} = 1{,}60 > Z_H$

Ha obtenido mejor rendimiento en Matemáticas

7. El valor X del recibo mensual de la luz de una familia sigue una distribución normal de media 80 euros y desviación típica 5 euros. Calcula las siguientes probabilidades: $P(X < 85)$; $P(X \le 70)$; $P(X \ge 77)$; $P(74 \le X \le 88)$

Solución:

$$P(X < 85) = P(Z < 1) = 0{,}8413$$
$$P(X \le 70) = P(Z \le -2) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0{,}0228$$
$$P(X \ge 77) = P(Z \ge -0{,}6) = P(Z \le 0{,}6) = 0{,}7257$$
$$P(74 \le X \le 88) == P(-1{,}2 \le Z \le 1{,}6) = P(Z \le 1{,}6) - P(Z \le -1{,}2) = 0{,}8301$$

8. Una máquina automática produce unos ejes de anchura media 10 mm y desviación típica 0,1 mm. Los ejes que tienen una anchura superior a 10,2 mm no sirven por ser demasiado anchos, y lo mismo ocurre con los que miden menos de 9,8 mm (en este caso por ser demasiado estrechos). ¿Qué porcentaje de ejes habrá que desechar?

Solución: Sea X = anchura de un eje $\equiv$ N (10; 0,1)

$$P(9{,}8 \le X \le 10{,}2) = P(-2 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = 2P(Z \le 2) - 1 = 0{,}9545$$

Luego el 95,45% de los ejes serán aceptables y habrá que desechar el 4,55% de los ejes fabricados.

9. Se sabe que el 2% de las piezas fabricadas por una máquina automática son defectuosas. Calcula la probabilidad de que en un lote de 5000 piezas fabricadas haya más de 120 piezas defectuosas.

Solución: X = nº de piezas defectuosas en el lote $\equiv$ B$(5000;\ 0{,}02)$. Como $n > 30$, $np > 5$, $nq > 5$, podemos aproximar la distribución binomial por una normal: $X \cong N(100, \sqrt{98})$

Ejercicios y Problemas de probabilidad

1. En una empresa de auditorías se ha contratado a tres personas para inspeccionar a las empresas bancarias realizando las correspondientes auditorías. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las inspecciones realizadas por la primera persona, el 1% son erróneas; la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.

a) Calcula la probabilidad de que, al elegir al azar una inspección, ésta sea errónea.

b) Al elegir una inspección correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

2. La probabilidad de que un cazador novato cobre una pieza es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la probabilidad de que cobre una pieza al menos 3 veces.

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 4 y varianza 9:

a) Calcula $p(3{,}4 \leq X \leq 4{,}6)$

b) Encuentra un valor *a* tal que $p(4-6a \leq X \leq 4+6a) = 0{,}75$

4. Calcula $p(A \cup B)$ y $p(A \cap B)$ sabiendo que $p(A \cup B) - p(A \cap B) = 0{,}4$, $p(A) = 0{,}6$ y $p(B) = 0{,}8$.

5. a) Puede suponerse que los salarios de los trabajadores de un país siguen una distribución normal de media 2000 euros y desviación típica desconocida. Si la probabilidad de ganar más de 2100 euros es de 0,33, ¿cuál es la desviación típica?

b) Los salarios en euros de los trabajadores en un segundo país también puede suponerse que siguen una distribución normal con la misma media y con varianza de 40000 euros^2. ¿Es más fácil ganar más de 2100 euros en este segundo país que en el país del apartado anterior?

6. Se lanzan dos dados A y B con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea múltiplo de 4?

7. En un IES se va a organizar una excursión que consiste en una semana en la nieve. De los alumnos de Bachillerato van a apuntarse 20 chicas y 25 chicos de un total de 43 chicas y 50 chicos. Si se elige un alumno al azar calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico y no vaya a la excursión.

b) Vaya a la excursión sabiendo que es chica.

c) Sea chica sabiendo que va a la excursión.

d) ¿Son los sucesos “sea chica” e “ir de excursión” sucesos independientes?

8. Se considera el experimento “lanzar una moneda tres veces”. Sea *A* el suceso “obtener al menos una cara” y *B* el suceso “obtener al menos dos cruces”. Calcula $p(A \cup B)$

9. Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

La Matemática no es real, pero parece real. ¿Dónde está ese lugar?

Richard Phillips Feynman (físico)

Ejercicios de Distribuciones discretas. Distribución Binomial

1. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por la tabla

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,15	*m*	0,2	0,15	0,2	0,15

Determina el valor de *m* y para que $P(X)$ sea una función de probabilidad. Calcula $P(2<X<5)$; $P(X\geq 3)$; $P(X<0)$.

2. Dos personas A y B juegan con una moneda. Si sale cara, A recibe 1€ de B; si sale cruz B recibe 1€ de A. Sea X la variable aleatoria "ganancia de A en 3 jugadas". Halla la función de probabilidad. Calcula su media y su varianza.

3. De una baraja española se extraen 8 cartas, de una en una y con devolución. Comprueba que la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se ha obtenido una figura sigue una distribución binomial. Halla los parámetros *n* y *p*.
Calcula $P(X=5)$; $P(X<2)$; $P(X\geq 4)$
¿Cuál es el valor de la esperanza matemática? ¿Y su desviación típica?
Sol: Es *B*(8; 0,3);
$P(X=5)=0,0467$; $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0,2553$; $P(X\geq 4)=0,2587$
$\mu=n\cdot p=2,4$; $\sigma^2=n\cdot p\cdot q=1,68$; $\sigma=1,296$

4. Un examen tipo test consta de 10 preguntas. Cada pregunta tiene cuatro posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Un alumno que no ha estudiado responde al azar a las preguntas del examen.
   a) Halla su función de probabilidad.
   b) Calcula la probabilidad de que el alumno apruebe el examen.
   c) Halla su media, varianza y su desviación típica.

Sol: a) $f(x)=\begin{cases}\binom{10}{x}\cdot 0,25^x\cdot 0,75^{10-x} & x=0,1,2...10\\ 0 & \textit{en otro caso}\end{cases}$

b) $P(X\geq 5)=\sum_{k=5}^{10}\binom{10}{k}\cdot 0,25^k\cdot 0,75^{10-k}=0,0781$

c) $\mu=10\cdot 0,25=2,5$; $\sigma^2=10\cdot 0,25\cdot 0,75=1,875$; $\sigma=1,369$

5. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda trucada es 0,75. Si la lanzamos cinco veces,
   a) Halla su función de probabilidad.
   b) Calcula $P(X\geq 3)$; $P(X=0)$; $P(1\leq X<3)$
   c) Calcula los valores de su media, varianza y desviación típica.

Sol: a) $f(x)=\begin{cases}\binom{5}{x}\cdot 0,75^x\cdot 0,25^{5-x} & x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & \textit{en otro caso}\end{cases}$

b) Puesto que en la tabla sólo tenemos los datos para $0,01\leq p\leq 0,5$, consideramos como éxito el obtener cruz, es decir consideramos la variable aleatoria *Y* de parámetros *B*(5;0,25), por tanto:

$$P(X \geq 3) = P(Y < 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{5-k} = 0,8965;$$

$$P(X = 0) = P(Y = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0,25^5 \cdot 0,75^0 = 0,001; \; ;$$

$$P(1 \leq X < 3) = P(X < 3) - P(X < 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = P(Y = 4) + P(Y = 3) = 0,1025$$

c) $\mu = 5 \cdot 0,75 = 3,75$; $\sigma^2 = 0,9375$; σ=0,9682

6. La probabilidad de que en cierto momento cada uno de los seis miembros de una familia quiera ver la televisión es 0,2. Sabiendo que a ninguno de los seis le gusta el mismo programa, ¿cuántos televisores debe haber (como mínimo) en la casa para que todos puedan ver su programa favorito al menos en un 90% de los casos?
   Sol: Se trata de una distribución *B*(6;0,2).
   Hay que hallar *x* tal que $P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{6}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{6-k} = 0,9$.
   Esto se verifica para *x* = 2.
7. Una máquina fabrica cierto tipo de circuito integrado. Este circuito se comercializa en lotes de 5 unidades, de los que compramos seis. Si sabemos que la probabilidad de que un circuito tenga algún defecto es 0,01, calcula:
   a) Probabilidad de que al menos un lote contiene algún circuito defectuoso.
   b) Todos los lotes contienen algún circuito defectuoso.
   c) Tres lotes contienen algún circuito defectuoso.

   Sol: Este es un caso de probabilidad combinada, es decir primero tenemos que hallar la probabilidad de que en un lote haya un circuito defectuoso y después la probabilidad de que entre los lotes comprados haya alguno con circuitos defectuosos:
   1. La variable aleatoria, *X*; que indica el número de circuitos defectuosos en un lote sigue una distribución binomial *B*(5;0,01).
      La probabilidad de que en un lote haya algún circuito defectuoso es:
      $$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^5 = 0,049.$$
   2. La variable aleatoria, *Y*, que indica el número de lotes que contiene algún circuito defectuoso es $B(6; 0,049) \simeq B(6; 0,05)$. Por tanto:
      a) $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^6 = 0,2649$
      b) $P(Y = 6) = 0$; c) $P(Y = 3) = 0,0021$
8. Una pastelería empaqueta cajitas de bombones. La probabilidad de que un bombón esté relleno de mermelada es 0,7 y la probabilidad de que esté relleno de praline es 0,3. Si una persona compra tres cajitas de bombones con seis bombones en cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en todas ellas haya algún bombón relleno de mermelada?
   Sol: Es el mismo caso que el problema anterior. Su solución es:
   $$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0,9993^3 \cdot 0,0007^0 = 0,9979.$$

“Es detestable esa avaricia espiritual que tienen los que sabiendo algo, no procuran la transmisión de esos conocimientos”

Miguel de Unamuno.

Ejercicios de Inferencia Estadística

1. En cierto barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.
   a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reemplazamiento. ¿Por qué?
   b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2500 niños, 7000 adultos y 500 ancianos, posteriormente se decide elegir la muestra anterior utilizando un muestreo estratificado. Determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.
2. Sea la población de elementos: {22, 24, 26}
   a) Escribe todas las muestras posibles de tamaño dos, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.
   b) Calcula la media y la varianza de la población.
   c) Calcula la media y la varianza correspondiente a la variable asociada a las medias muestrales:
3. La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1,62 m y la desviación típica 0,12 m. ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1,60?
4. El 15% de los jóvenes de 18 a 25 años usa gafas. Nos proponemos elegir al azar a 40 jóvenes y nos preguntamos qué proporción, *p*, de jóvenes usarán gafas en esa muestra.
5. Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios, elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

   95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110.

   Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida, ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

   Halla un intervalo para la media de la población al nivel de confianza del 95%.
6. La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza 0,16 m^2.
   a) Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.
   b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con un nivel de confianza del 90%?
7. Las estaturas, en centímetros, de los deportistas de Castilla y León es una población normal $N(178,6)$. Se forman equipos de 12 deportistas para representar a Castilla y León en el próximo campeonato nacional. Suponiendo que se escogen al azar, hallar un intervalo de confianza al 95% en el que estén recogidas las estaturas medias de los equipos.
8. De una variable estadística conocemos la desviación típica, $\sigma = 8$, pero desconocemos la media, μ. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño $n = 60$ cuya media es $\overline{x} = 37$. Determinar un intervalo para la media de la población al nivel de significación del 1%.

Ejercicios de Inferencia Estadística

H19_B2

1. Una máquina fabrica tornillos. El 5% de ellos son defectuosos. Se empaquetan en cajas de 400. Describir la variable “número de tornillos defectuosos en una caja”.
Sol: El número de “tornillos defectuosos” en las cajas de 400 unidades escogidas al azar es una $B(400; 0.05)$. Sus parámetros son $\mu = n \cdot p = 20$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 4.36$; puesto que $n \cdot p = 20 > 5$ y p no toma valores próximos a 0, la binomial se aproxima a una normal con sus mismos parámetros: $B(400; 0.05) \simeq N(20; 4.36)$.
2. El 15% de los jóvenes de 18 a 25 años usa gafas. Nos proponemos elegir al azar a 40 jóvenes y nos preguntamos qué proporción, *p*, de jóvenes usarán gafas en esa muestra.
Sol: $B(40; 0.15)$. Puesto que $n \cdot p = 6 > 5$ $B(n, p) \simeq N(np, \sqrt{npq})$. Por tanto, nuestra muestra se aproxima a una $N(6; 2.26)$ y la proporción de jóvenes que usan gafas en una muestra de tamaño 40 es $N(0.15; 0.057)$
3. El coeficiente intelectual (C.I.) de los alumnos de un centro se distribuye $N(110,15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$.
   a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras que pueden extraerse?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el C.I. medio de los 25 alumnos de la muestra obtenida sea superior a 115?
   c) Obtener el intervalo de confianza de las medias muestrales correspondientes al nivel de significación del 5%.

   Sol: a) $N(110,3)$; b) $P(\overline{X} > 115) = 0.0475$; c) $(104.12;115.88)$
4. De una variable estadística conocemos la desviación típica, $\sigma = 8$, pero desconocemos la media, μ. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño $n = 60$ cuya media es $\overline{x} = 37$. Determinar un intervalo para la media de la población al nivel de significación del 1%. *Sol*: $(34.34; 39.66)$.
5. Las estaturas, en centímetros, de los deportistas de Castilla y León es una población normal $N(178, 6)$. Se forman equipos de 12 deportistas para representar a Castilla y León en el próximo campeonato nacional. Suponiendo que se escogen al azar, hallar un intervalo de confianza al 95% en el que estén recogidas las estaturas medias de los equipos.
Sol: La distribución de las medias muestrales es $N(178,1.73)$ y el intervalo de confianza al 95% es $(178 \pm 1.96 \cdot 1.73) = (174.61,181.39)$
6. Al medir un tiempo de reacción, un psicólogo sabe que la desviación típica del mismo es 0.5 segundos. ¿Cuál es el número de medidas que deberá realizar para que, con un 99% de confianza, el error cometido no exceda de 0.1 segundos? *Sol*: 166 medidas.
7. Un coronel desea estimar la estatura media de todos los soldados de su regimiento con un error menor de 0.5 cm utilizando una muestra de tamaño 30 soldados. Sabiendo que la desviación típica es $\sigma = 5.3$ cm, ¿cuál será el nivel de confianza con el que se realiza la estimación? Interpreta el resultado. *Sol*: 39.7%. (Se pretende afinar mucho con una muestra muy pequeña).
8. Se ha lanzado 100 veces una moneda obteniéndose 62 caras. Estima la probabilidad de “cara” con un nivel significativo del 5%. *Sol*: (0.525; 0.715).
9. Tomada al azar una muestra de 300 personas mayores de 15 años en una gran ciudad, se encontró que 104 de ellas leían el periódico regularmente. Hallar, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de lectores de periódicos entre los habitantes de esa ciudad mayores de 15 años. *Sol*: $(0.302; 0.392)$

10. Para estimar el número de peces que hay en un pantano se procede del siguiente modo: se pescan con red una cierta cantidad de ellos, 349, se marcan y se devuelven al pantano. Al cabo de varios días se vuelve a pescar otro montón de ellos y se averigua qué proporción están marcados. En esta segunda pesca se han obtenido 514 peces, de los cuales hay 37 marcados.
    a) Halla un intervalo de confianza, al 90%, para la proporción de peces marcados en el pantano.
    b) Halla un intervalo de confianza, al 90%, para el total de peces del pantano.

    Sol: a) $p=\dfrac{37}{514}=0.072$; un intervalo de confianza para la proporción de la población a partir de la muestra, al nivel 90% es $(0.053;0.091)$. b) Como $p=\dfrac{349}{N}$, el número de peces del estanque está en el intervalo $\left(3835,6585\right)$ al nivel 90%.

11. En las últimas votaciones, el 53% de los votantes de un pueblo estaban a favor del alcalde. Se acaba de realizar una encuesta a 360 personas elegidas al azar y 176 de ellas estaban a favor del alcalde. ¿Se puede afirmar, con un nivel de significación del 10%, que el alcalde no pierde popularidad?

    Sol. $H_0: p \geq 0.53$; $H_1: p < 0.53$. El alcalde pierde popularidad (se acepta H_1).

12. Una empresa de productos farmacéuticos afirma en su publicidad que uno de sus medicamentos reduce considerablemente los síntomas de la alergia primaveral en el 90% de la población. Una asociación de consumidores ha experimentado dicho fármaco en una muestra de 200 socios de la misma, obteniendo el resultado indicado en la publicidad en 170 personas. Determina si la asociación de consumidores puede considerar que la afirmación de la empresa es estadísticamente correcta al nivel de significación del 5%.

    Sol: $H_0: p=0.9$; $H_1: p\neq 0.9$. El intervalo para la proporción de la población al 95% es (0.8588;0.9412). Como la proporción obtenida en la muestra es 0.85 que está fuera del intervalo, no aceptaría la afirmación de la empresa.

13. Se cree que el coeficiente intelectual medio de los estudiantes de una universidad es 113, con una desviación típica de 7. Para contrastar la hipótesis, se extrae una muestra de 180 estudiantes y se obtiene en ellos un coeficiente intelectual medio de 115. ¿Podemos aceptar la hipótesis con un nivel de significación del 5%?

    Sol: $H_0: \mu=113$; $H_1: \mu\neq 113$. $N(113;0.52)$ Al nivel del 95% de confianza obtenemos el intervalo $(111.98;114.02)$. Como $\bar{x}=115$ no está en el intervalo se acepta H_1.

14. El peso de los pollos de una granja sigue una distribución $N(2.6;0.5)$.Se experimenta un nuevo tipo de alimentación con 50 crías. Cuando se hacen adultos, se les pesa y se obtiene un peso medio de 2.78 kg. Contrastar al nivel de significación del 1% que el peso de la población no aumenta.

    Sol: $H_0: \mu \leq 2.6$; $H_1: \mu > 2.6$. La zona de aceptación es $(-\infty;2.76)$. Se acepta H_1 al nivel de significación del 1%.

15. Se ha entrevistado a 600 familias y de ellas hay 192 que poseen ordenador en casa. Con un nivel de significación del 5%, ¿puede admitirse que el 30% de las familias poseen ordenador en casa?

16. Una fábrica de lámparas garantiza que sus productos tienen una vida media de 2000 horas con una desviación típica de 100 horas. Contrasta la hipótesis $H_0: \mu = 2000$ frente a la alternativa $H_1: \mu \neq 2000$ teniendo en cuenta que una muestra de 50 lámparas tuvo una vida media de 1875 horas, tomando $\alpha = 0.05$

17. Se tiene una población normal con desviación típica $\sigma = 20$, y para contrastar la hipótesis H_0: $\mu = 60$, H_1: $\mu \neq 60$ se extrae una muestra aleatoria de tamaño $n = 50$ y se calcula la media muestral $\overline{X}$. Con un nivel de significación $\alpha = 5\%$, ¿qué valores de $\overline{X}$ nos harán rechazar la hipótesis nula?
18. De 2500 nacimientos que hubo en un hospital se encontró que 1310 fueron niños y 1190 niñas. Utilizando estos datos y un nivel de significación del 5%, contrasta la hipótesis de que la probabilidad de nacer de un sexo o de otro es la misma. Ídem para una probabilidad de varón de 0.51.
19. El diámetro de unos ejes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 mm. Se toma una muestra de tamaño 25 y se obtiene un diámetro medio de 36 mm. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación de 0.01 que la media de la población es de 40 mm?
20. El nacimiento de un solo bebé se puede considerar como un experimento aleatorio con dos posibles resultados, a saber: *A*: Nacimiento de un niño; *B*: Nacimiento de una niña. En una determinada población se tomó una muestra de tamaño 3000 bebés de los que resultaron 1578 niños. a) Establecer el contraste, dando la hipótesis nula y la alternativa. b) Realizar el contraste para un nivel de significación del 5%. ¿Qué habría sucedido, al mismo nivel de significación si el tamaño de la muestra hubiese sido 300 y el número de niños 158?
21. Determina el número de veces que habría que lanzar una moneda equilibrada para que la proporción de caras se encontrara entre 0.4 y 0.6 con una probabilidad de 0.9.
22. En una encuesta realizada en un centro educativo se pedía a las personas entrevistadas que calificaran, según una escala de 0 a 100, la labor realizada por la Dirección del centro durante los últimos cuatro años. Supón que la desviación típica poblacional es $\sigma = 5$. Construye un intervalo de confianza del 95% para la puntuación media μ sabiendo que en una muestra de 320 personas entrevistadas se ha obtenido una media de 72.50 puntos.
23. Si desconoces por completo el valor de una proporción *p* y deseas estimarla con un error de muestreo $e = \pm 3\%$ y un grado de confianza 95%, ¿qué tamaño de muestra deberías tomar si la población es muy grande? (Nota: al ser desconocido el valor de *p* nos debemos poner en el peor de los casos, es decir $p = 0.5$
24. De una población normal con desviación típica $\sigma = 4$ se extrae una muestra de tamaño 25 y cuya media muestral vale 65.2. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ de la población.

Contraste de hipótesis

1. Se sabe que la desviación típica de las notas de cierto examen de Matemáticas es 2,4. Para una muestra de 36 estudiantes se obtuvo una nota media de 5,6. ¿Sirven estos datos para confirmar la hipótesis de que la nota media del examen fue de 6, con un nivel de confianza del 95%? *Sol*: Se acepta H_0
2. Un sociólogo ha pronosticado, que en una determinada ciudad, el nivel de abstención en las próximas elecciones será del 40% como mínimo. Se elige al azar una muestra aleatoria de 200 individuos, con derecho a voto, 75 de los cuales estarían dispuestos a votar. Determinar con un nivel de significación del 1%, si se puede admitir el pronóstico. *Sol*: Se acepta H_0.
3. Un informe indica que el precio medio del billete de avión entre Canarias y Madrid es, como máximo, de 120 € con una desviación típica de 40 €. Se toma una muestra de 100 viajeros y se obtiene que la media de los precios de sus billetes es de 128 €. ¿Se puede aceptar, con un nivel de significación igual a 0,1, la afirmación de partida? *Sol*: Se rechaza H_0.
4. Una marca de nueces afirma que, como máximo, el 6% de las nueces están vacías. Se eligieron 300 nueces al azar y se detectaron 21 vacías. a).Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación de la marca? b) Si se mantiene el porcentaje muestral de nueces que están vacías y $1-\alpha = 0.95$, ¿qué tamaño muestral se necesitaría para estimar la proporción de nueces con un error menor del 1% por ciento? *Sol*: Se acepta H_0; $n \geq 2501$.
5. La duración de las bombillas de 100 W que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas de duración. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía? *Sol*: Se rechaza H_0.
6. Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2400 horas, con una desviación típica igual a 300. Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra tendrá una duración media de 2320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%? *Sol*: Se rechaza H_0.
7. El control de calidad una fábrica de pilas y baterías sospecha que hubo defectos en la producción de un modelo de batería para teléfonos móviles, bajando su tiempo de duración. Hasta ahora el tiempo de duración en conversación seguía una distribución normal con media 300 minutos y desviación típica 30 minutos. Sin embargo, en la inspección del último lote producido, antes de enviarlo al mercado, se obtuvo que de una muestra de 60 baterías el tiempo medio de duración en conversación fue de 290 minutos. Suponiendo que ese tiempo sigue siendo Normal con la misma desviación típica: ¿Se puede concluir que las sospechas del control de calidad son ciertas a un nivel de significación del 2%? *Sol*: Se rechaza H_0.
8. Se cree que el nivel medio de protrombina en una población normal es de 20 mg/100 ml de plasma con una desviación típica de 4 miligramos/100 ml. Para comprobarlo, se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18.5 mg/100 ml. ¿Se puede aceptar la hipótesis, con un nivel de significación del 5%?

   Sol: Se rechaza la hipótesis nula.
9. Las ausencias en días de un empleado de una empresa para un determinado año se aproximan por una distribución normal de media μ días y desviación típica $\sigma = 2$ días. Se pretende estimar μ usando la media $\overline{x}$ de las ausencias en ese año de n trabajadores seleccionados de forma aleatoria en la empresa. a) Si suponemos $\mu = 6,3$ y que $n = 25$, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral $\overline{x}$ esté comprendida entre 6,1 y 6,5 días? b) ¿Qué tamaño n debería tener la muestra aleatoria para poder estimar μ usando la media muestral $\overline{x}$ con un error máximo (diferencia entre μ y $\overline{x}$) de ± 0,2 días con una confianza del 95%?

   Sol: 0,383; $n \geq 385$.

EJERCICIOS DE MATRICES

1. ¿En qué fila de una matriz está el elemento a_{43}? ¿Y en qué columna? ¿Cuántas columnas tiene una matriz de dimensión 3×4? ¿Y cuántas filas? ¿Y cuántos elementos? Una matriz que esté compuesta por ocho elementos ¿de qué dimensiones puede ser?

2. Calcular a y b para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} a+b & 2 \\ 2 & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, efectuar las siguientes operaciones: A+B; (−2A)−(3B)

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular:

$A\cdot B,\ \ A\cdot C,\ -3A+8C;\ A^2$

Solución: $A\cdot B=\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 23 \\ 16 & 23 \end{pmatrix}$; $A\cdot C=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 6 \\ 13 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $-3A+8C=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 18 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

$$(-2A)\cdot(3B);\ 2(A^t-5B);\ -2A^t+3B^t;\ (A^t)^t;\ (A^t+B)^t;\ A^t+B^t$$

Solución:

$$(-2A)\cdot(3B)=\begin{pmatrix} 24 & 30 & -60 \\ 48 & -84 & -276 \\ -42 & -222 & -300 \end{pmatrix};\ 2(A^t-5B)=\begin{pmatrix} -16 & 2 & -16 \\ 52 & -12 & -64 \\ -16 & -30 & 6 \end{pmatrix};\ -2A^t+3B^t=\begin{pmatrix} 2 & -27 & -11 \\ 1 & -2 & 3 \\ 15 & 21 & -13 \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}=A;\ (A^t+B)^t=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 7 & 6 & 3 \\ 10 & 10 & 9 \end{pmatrix};\ A^t+B^t=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comprueba que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

7. Comprueba que las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ verifican $A\cdot B=0$.

8. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; resuelve la ecuación matricial $3X+2A=5B$.

Solución: $X=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

9. Prueba que si A y B son dos matrices diagonales del mismo orden, entonces se verifica: $A\cdot B=B\cdot A$

10. Encuentra dos matrices cuadradas X e Y, tales que $\begin{cases} 3X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} \\ 5X-2Y=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\end{cases}$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1/11 & 1/11\\ 4/11 & 1/11\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}8/11 & -3/11\\ -1/11 & -14/11\end{pmatrix}$

11. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 4 & 0\\ 7 & 3 & 8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -5 & 2 & 7\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 1 & 5 & 7\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Efectúa las siguientes operaciones:

$$A\cdot(B\cdot C);\quad A\cdot(B+C);\quad (A+B)\cdot(A-C);\ (-A)\cdot(-2B+3C);\ C^t\cdot(A^t+2B^t)$$

Solución:

$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}-25 & -27 & -37\\ -26 & 40 & 120\\ 72 & 121 & 330\end{pmatrix}$; $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}7 & -1 & 20\\ 26 & 22 & 92\\ 45 & 30 & 100\end{pmatrix}$; $(A+B)\cdot(A-C)=\begin{pmatrix}-2 & 10 & -38\\ 76 & 25 & 1\\ 69 & 54 & -27\end{pmatrix}$

$(-A)(-2B+3C)=\begin{pmatrix}-41 & -22 & -10\\ -118 & 4 & -46\\ -100 & 95 & -50\end{pmatrix}$; $C^t\cdot(A^t+2B^t)=\begin{pmatrix}33 & -12 & 54\\ 0 & 34 & 17\\ 42 & 58 & 100\end{pmatrix}$

12. El coste total de tres tipos de juguetes se puede expresar de la siguiente forma:

	Trabajo (horas)	Materiales (unidades)	Otros costes (unidades)
Juguete A	2	100	40
Juguete B	3	120	30
Juguete C	5	200	50

Si el trabajo vale 6€. cada hora, la unidad de material 0.25€. y cada unidad de otros costes vale 0.5€., expresa en lenguaje matricial los datos y calcula el coste total de 1.000 juguetes del tipo A, 500 del B y 800 del C.

Solución: 172500€

13. En un pueblo hay dos fábricas de quesos. La fábrica A produce 30 quesos de oveja y 20 de cabra en una hora. La fábrica B produce 40 quesos de oveja y 10 de cabra cada hora. La jornada de trabajo en la fábrica A es de 7 horas mientras que en la B se trabajan 8 horas diarias. Expresa en forma matricial la producción de quesos de oveja y de cabra de ambas fábricas.

Solución: $\begin{pmatrix}\text{producción de quesos de oveja}\\ \text{producción de quesos de cabra}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}530\\ 220\end{pmatrix}$

Ejercicios de Matrices

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$; calcula:

   a) $2A-B^t$ b) $A\cdot C$ c) $B\cdot A-2C$

   Sol: a) $\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0 & -7 & 1\\ 5 & 16 & -2\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}-3 & -5 & 5\\ 10 & -7 & -7\\ -12 & 2 & 10\end{pmatrix}$

2. Calcula A^2-3A-I siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2. *Sol*: $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

3. Calcula la potencia n-ésima de la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ *Sol*: $\begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$

4. Encuentra el valor de las incógnitas para que se verifique cada una de las siguientes igualdades:

   a) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & x & 1\\ -1 & 1 & -1\\ y & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2 & 6\\ 1 & -8 & -4\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

   Sol: a) $x=-1$; $y=1$ b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

5. Calcula las matrices X e Y tales que sean solución del siguiente sistema:

   $$\begin{cases}2X-3Y=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 11 & -4\end{pmatrix}\\ X+Y=\begin{pmatrix}1/3 & -1/2\\ 1/2 & -1/2\end{pmatrix}\end{cases}$$

   Sol: $X=\begin{pmatrix}6/5 & -1/10\\ 5/2 & -11/10\end{pmatrix}$; $Y=\begin{pmatrix}-13/15 & -2/5\\ -2 & 3/5\end{pmatrix}$

6. Sean dos matrices cuadradas A y B.

   a) ¿Tienen la misma solución las ecuaciones $A\cdot X=B$ y $X\cdot A=B$? Razona la respuesta.

   b) ¿Puede ocurrir que una tenga solución y otra no?

   c) Resuelve ambas ecuaciones para $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 10\end{pmatrix}$

   Sol: a) NO. El producto de matrices no es conmutativo; b) Si una tiene solución la otra también; ya que para que tenga solución, la matriz A tiene que ser regular.

   c) $X=\begin{pmatrix}-1/2 & -5/4\\ 7/2 & 35/4\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}7/4 & 13/4\\ 7/2 & 13/2\end{pmatrix}$

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $X\cdot B=A+B$.

Sol: $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 4 & 0\\ 7 & 3 & 8\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -5 & 2 & 7\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

$(A^t)^t$; $(A^t+B)^t$; A^t+B^t

Sol: $(A^t)^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 4 & 0\\ 7 & 3 & 8\end{pmatrix}=A$; $(A^t+B)^t=\begin{pmatrix}4 & -4 & -2\\ 7 & 6 & 3\\ 10 & 10 & 9\end{pmatrix}$; $A^t+B^t=\begin{pmatrix}4 & 1 & 8\\ 2 & 6 & 6\\ 0 & 7 & 9\end{pmatrix}$

9. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\\ 2 & 7\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, calcular:

$A\cdot B$, $A\cdot C$, $-3A+8C$, A^2

Sol: $A\cdot B=\begin{pmatrix}10 & 8\\ 10 & 23\\ 16 & 23\end{pmatrix}$; $A\cdot C=\begin{pmatrix}9 & 0 & 1\\ 7 & 0 & 6\\ 13 & 0 & 5\end{pmatrix}$; $-3A+8C=\begin{pmatrix}7 & -3 & 0\\ 18 & 0 & -1\\ -4 & -3 & 10\end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix}-11 & -3 & -30\\ 36 & 22 & -18\\ 88 & 43 & 43\end{pmatrix}$

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, encuentra dos números reales x e y tales que: $A+xA+y\mathrm{I}=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula (ambas de orden 2X2).

Sol: $x=-1,\quad y=0$

11. Sea $A=\mathrm{I}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$, donde I es la matriz identidad de orden 2. Comprueba que $A^2=\frac{1}{2}A$.

Deduce del resultado anterior el valor de A^n, siendo $n\in\mathrm{N}$.

Solución: $A^n=\frac{1}{2^{n-1}}A$

12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, encuentra una matriz B tal que $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

Solución: $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Matrices y Determinantes

1. El departamento de contabilidad de una empresa efectúa el balance de los dos primeros meses del año relativo a los tres productos fabricados en sus delegaciones D_1 y D_2. Las ventas vienen reflejadas por las matrices:

$$E=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix} \; ; \; F=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) La matriz de ventas realizadas durante los meses de enero y febrero.
b) La matriz de la variación de las ventas de enero en relación con las de febrero.
c) La matriz de las ventas de marzo sabiendo que se duplicarán las ventas de enero.
d) ¿Cuál será la matriz de ventas en el mes de vacaciones?
e) Representa por medio de una matriz las ventas en el primer trimestre.

2. Sabiendo que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ y que $|A|=a\neq 0$, probar que el determinante de la matriz inversa de A es $1/a$.

3. Sea $A=(a_{ij})$ una matriz de orden tres, cuyos elementos están definidos por la expresión $a_{ij}=i+j$. Halla su determinante. *Solución:* 0

4. Comprueba, sin desarrollarlo, que el siguiente determinante es múltiplo de 30: $\begin{vmatrix}2 & -3 & 25\\ 18 & 9 & 20\\ 14 & 6 & 5\end{vmatrix}$

5. Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 y que $|A|=3$; calcula los siguientes determinantes: $|A^t|$; $|-3\cdot A|$; $|A^{-1}|$; $|A^2|$; $|-A|$.

6. Estudia si es cierta la siguiente expresión y justifica tu respuesta:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

7. Sean A, B y C matrices cuadradas del mismo orden tales que $|A|\neq 0$ y $A\cdot B=A\cdot C$. ¿Podemos asegurar que $B=C$? Justifica tu respuesta.

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x^2 & 1+x\\ 1-x & 2x & 5\end{pmatrix}$.

Si $|A|=-2$, calcula $|A^{-1}|$; $|2A|$; $\begin{vmatrix}2x & 2 & 4\\ 2 & x^2 & 1+x\\ 3-3x & 6x & 15\end{vmatrix}$; $|A^t|$

9. Si A es una matriz cuadrada regular de orden tres, ¿cuáles serán los órdenes de $Adj(A)$ y de A^{-1}?

10. Demuestra, sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ 3 & 3 & 9\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & -9 & -3\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}$$

El estudio es el único medio de desarrollar tu mente al máximo.

Flor Leticia Yáñez.

Matrices y Determinantes

1. Halla el valor de los siguientes determinantes , desarrollando por la fila o la columna que más interese:

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$$

3. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & m \end{pmatrix}$ siendo m un número real. Calcula el rango de A según los valores de m.

4. Halla la matriz inversa de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, halla la matriz X tal que $A\cdot X = B$ y la matriz Y tal que $Y\cdot A = B$

6. Expresa la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica o hemisimétrica: $A = S + T$; $S = S^t$, $T = -T^t$

7. Resuelve la ecuación matricial $A^t \cdot X - B = 0$ siendo: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, indica cuáles de las siguientes igualdades son ciertas:

$$|A+C| = |A| + |C| \ ; \quad |2B| = 2|B|; \quad |B\cdot C| = |B|\cdot|C| \ ; \quad |2A| = 4|A|$$

Lo maravilloso de aprender algo es que nadie puede arrebatárnoslo

B. B. King.

Ejercicios de Matrices y Determinantes

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, calcula:

   $a)\ C+A\cdot B$; $b)\ C^{-1}+(A\cdot B)^{-1}$; $c)\ (C+A\cdot B)^{-1}$; $d)\ |C|$; $e)\ |C^{-1}|$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, calcula $(A-I_3)^2\cdot(A-5I_3)$ siendo I_3 la matriz identidad correspondiente.

3. Halla una matriz X, tal que $X\cdot A=B$, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, calcula: $\frac{1}{2}(A+B)$; $(A-B)^2$; $A^{-1}\cdot B^{-1}$

5. Indica las propiedades de los determinantes que permiten escribir las siguientes igualdades:

   $a)\ \begin{vmatrix}2 & 8\\ 24 & 100\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 0 & 4\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}$; $b)\ \begin{vmatrix}5 & 30 & 20\\ 6 & 9 & 12\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=15\cdot\begin{vmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=15\cdot\begin{vmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$

6. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}=10.$

7. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$, calcula, si existe, una matriz X tal que $X\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

8. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}m & -1 & 4\\ 3 & m & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, determina los valores de *m* para los que la matriz *A* es singular. Calcula su inversa para m=0.

9. Halla el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Si usted cree que la educación es cara, pruebe con la ignorancia

Derek Bok

Ejercicios de Matrices y Determinantes

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes.

$$a)\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\quad b)\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}\quad c)\begin{vmatrix}-a & 2\\ a^2 & 3a\end{vmatrix}\quad d)\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}\quad e)\begin{vmatrix}-3 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}\quad f)\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ -1 & a & -1\\ a+1 & -1 & a\end{vmatrix}$$

Sol: –7, 14, $-5a^2$, 4, 39, $-a^2-1$

2. Justifica, sin desarrollar, las siguientes igualdades.

$$a)\begin{vmatrix}2 & -1 & 8\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\quad b)\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 5\\ 2 & -6 & -4\end{vmatrix}=0\quad c)\begin{vmatrix}a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=0\quad d)\begin{vmatrix}1 & -1 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 2 & -6\\ 0 & -3 & -2 & 9\\ 1 & 4 & 3 & -12\end{vmatrix}=0$$

(En el (c) sumar a la primera fila la segunda).

3. Transforma los siguientes determinantes en sus equivalentes triangulares y calcula su valor.

$$a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 4 & 16\end{vmatrix}\quad b)\begin{vmatrix}x & x & x\\ x+y & x & x\\ x & x+z & x\end{vmatrix}$$

Sol: 2, xyz

4. Calcula las matrices inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1/2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Sol: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; $C^{-1}=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

5. Calcula las matrices inversas de:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Sol: $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -6 & 4\\ -5 & 5 & -3\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$

6. Halla los valores de *m* para los cuales la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & m & 2\\ m-1 & 1 & 1\\ m-2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ no posee inversa. *Sol*: 3 y 3/2.

7. Suponiendo que todas las matrices que aparecen son cuadradas del mismo orden y que las matrices *A* y *B* poseen inversa, despeja la matriz *X* en las siguientes expresiones.

$a)\ XA=AB$ $\qquad b)\ AX=AB$ $\qquad c)\ AX+AB=C$

$d)\ AXA=B$ $\qquad e)\ AXB=A^2$ $\qquad f)\ XA^t+B^t=(AB)^t$

"Nunca consideréis el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para entrar en el maravilloso mundo del saber"

A. Einstein

Sistemas de ecuaciones lineales

H27_Bach2

1. Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x-2z=a \\ x+y-2z=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y+z=a \\ x-y-2z=3 \\ 3x-2y-z=4a \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=2 \\ ax-y=1 \\ x+z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

2. Dado el sistema: $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+ay+az=2 \\ x+2ay+z=a \end{cases}$ Determina los valores de a para que el sistema sea incompatible, compatible indeterminado y compatible determinado. Resuélvelo para este último caso.

3. Halla para qué valor de m el sistema homogéneo $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$ tiene solución distinta de la trivial.

4. ¿Podrías decir algo sobre la compatibilidad de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas si el rango de su matriz ampliada es cuatro? Razona la respuesta.

5. En las fiestas de Festiland había tres espectáculos (A, B y C) cada uno de ellos con un precio distinto. Una persona fue dos veces a A, una vez a B y una vez a C y se gastó 13€; otra asistió dos veces a A y una vez a B, y se gastó 12€ y una tercera entró una vez a cada espectáculo, lo que le costó 8€. ¿Cuánto valía la entrada a cada uno de ellos? *Sol:* 5, 2, 1.

6. De una superficie que tiene forma de trapecio isósceles sabemos que el triple de la altura es el doble de la base menor; la suma de las dos bases y la altura es 10; y el doble de la base menor más el triple de la base mayor menos la altura es 16. ¿Cuáles son sus dimensiones?

   Sol: 2, 3 y 4.

7. En una máquina hay tres posibles jugadas: dos de ellas suman puntos y una resta. En cada partida se realizan once jugadas. Un jugador obtuvo 5 puntos realizando dos veces la primera jugada, una vez la segunda y dos la tercera. Otro realizó tres veces la primera y dos la segunda, obteniendo de este modo 12 puntos. Un último hizo una vez la primera, una la segunda y tres la última, con lo que obtuvo 2 puntos. ¿Cuál es la puntuación de cada jugada?

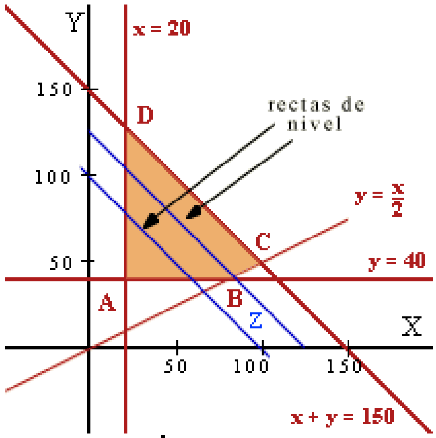
   Sol: 2, 3 y –1.

8. Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el doble del primero menos el segundo era doce unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números? *Sol*: 4, 9 y 11.

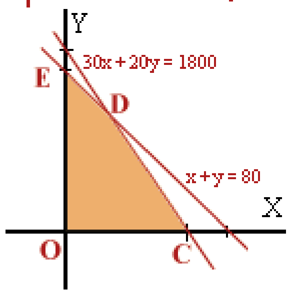
"No hay cosas sin interés. Tan sólo personas incapaces de interesarse".

Gilbert Keith Chesterton (1874-1936); escritor británico.

Programación Lineal

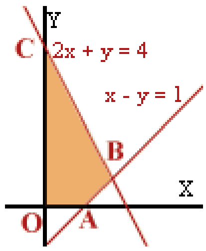


1. En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria). ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo?



2. En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La empresa constructora dispone para ello de un máximo de 18 millones de euros, siendo el coste de cada tipo de casa de 300.000€ y 200.000€, respectivamente. El Ayuntamiento exige que el número total de casas no sea superior a 80.
Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa de tipo A es de 120.000€ y de 80.000€ por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

3. Maximizar la función Z = f(x, y) = 4x + 2y sujeta a las restricciones
$2x + y \leq 4$, $x - y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.



Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son: f(O)=f (0,0) = 0 f(A) = f(1,0) = 4 ; f(B)=f(5/3,2/3) = 8 , f(C) = f(0,4) = 8. La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices B y C, por tanto, en todos los puntos del segmento BC. Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible.

4. Las restricciones pesqueras impuestas por la CE obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2.000 toneladas de merluza y 2.000 toneladas de rape, además, en total, las capturas de estas dos especies no pueden pasar de las 3.000 toneladas. Si el precio de la merluza es de 6 €/kg y el precio del rape es de 9 €/kg, ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

5. Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones: La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos. $\left[f_p(x,y) = 0,3x + 0,5y \ ; \ f_q(x,y) = 0,4x + 0,2y \right]$

- **a.** ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?
- b. ¿Qué mezcla hace q mínimo?

6. **Problema del transporte:** Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000, 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costes

de transporte, en cent(€) por pieza son los que aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

7. Problema de la dieta En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 6€ y el del tipo Y es de 18€. Se pregunta: ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

8. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

9. Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 euros y los de la mina B a 200 euros. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

10. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por Kg son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Coste €/kg
A	2	6	1	4
B	1	1	3	3

a) ¿Cuántos Kg. de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el coste de preparar la dieta sea mínimo?
b) b) ¿Cuántos Kg. de cada producto deberíamos comprar si el precio de A subiera a 6€/Kg?

11. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5g. Además se utiliza por lo menos 1g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.