Ejercicios de Aritmética y Álgebra

1. Calcula y simplifica: $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

2. Halla el valor de A en la siguiente expresión logarítmica: $\log A = 2+3\log x-\log\left(10xy^2\right)$

3. Determina el intervalo de la recta real que verifica: $|x-1|+|x+1|\le 5$

4. Calcula el coeficiente de x^5 en el siguiente desarrollo: $\left(\dfrac{3}{2}+2x\right)^{11}$

5. Calcula los valores de a y b para que el polinomio $P(x)=x^5-2x^4-ax^3+bx^2+13x+6$ sea divisible por el polinomio $Q(x)=(x+1)(x-3)$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{2^x\sqrt{4^x}}{8^{x+1}}=\sqrt{\dfrac{16^{x-1}}{2^{1-x}}}$ b) $9^x-10\cdot 3^x+11=2$ c) $\sqrt{9-x}=\sqrt{6-x}+\sqrt{3}$

   d) $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{6}{x+1}=\dfrac{11}{1-x^2}$ e) $x^6-9x^3+8=0$ f) $1+2\log x=\log 4+\log(5x)$

7. Resuelve el sistema: $\begin{cases}2x+y=8\\ 2x+3y^2=22\end{cases}$

8. Dada la ecuación $x^2+(2-m)x+10=0$, halla los valores de *m* para que las dos raíces de la ecuación se diferencien en tres unidades.

9. Resuelve el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\begin{cases}x+y=15\\ x+z=18\\ y+z=23\end{cases}$

10. Resuelve la inecuación: $x^3-3x^2-x+3>0$

11. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

    a) $\begin{cases}-20x+3\le 5-2x\\ 17(x+1)-1<6(x+10)\end{cases}$

    b) $\begin{cases}3x-y-4<x+y\\ \dfrac{x-y}{2}\ge\dfrac{y-x}{3}\end{cases}$

La esencia de las Matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples.

Stan Gudder (matemático americano)

Aritmética

1. Calcula: $a)\ |-5+3|\ ;b)\ ||-2|+(-3)|\ ;c)\ -|4\cdot(-2)|$
2. Desarrolla la expresión $|x-3|$ y aplícala para $x=-4$; $x=0$; $x=6$
3. Desarrolla la expresión $|2-x|+|x-3|$ y calcúlala para los casos $x=-3$; $x=0$; $x=8/3\ y\ x=5$
4. Escribe el entorno abierto de centro el número real −5 y radio 3 unidades. Exprésalo utilizando la herramienta de valor absoluto.
5. Efectúa los siguientes cálculos utilizando la notación científica:

$$a)\ \frac{0.00015\left(23\cdot10^{3}+2000\right)}{0.0025}=\ ;\ b)\ \frac{0.0048-7.2\cdot10^{-5}}{0.0006\cdot10^{11}}$$

6. Simplifica las siguientes expresiones:

$$a)\ 2+\sqrt{3}+\frac{3}{\sqrt{3}}=\ ;\ b)\ \sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}=\ ;\ c)\ \sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{4}\sqrt{18}=$$

7. Racionaliza: $a)\ \dfrac{3}{\sqrt[5]{9}}\ ;\ b)\ \dfrac{2}{3\sqrt{5}}\ ;\ c)\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
8. Halla el sexto término de los desarrollos de $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{8}\right)^{9}\ ;\ \left(3a^{2}+2ab\right)^{8}$
9. Calcula el término independiente del desarrollo de la potencia $\left(\dfrac{3}{x^{4}}+\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^{15}$
10. Simplifica: $a)\ \dfrac{\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}}{\frac{n+6}{6}}\ ;\ \ b)\ \dfrac{2^{n-3}(n+2)!}{2^{n-1}\binom{n+2}{2}}$
11. Calcula el valor de S en cada caso:

$a)\ \log S=3\log 2-4\log x+3\log y-\log z$

$b)\ \log S=\log(x+y)-\log\left(x^{2}-y^{2}\right)+5$

$c)\ \log S=-6\log\left(x^{2}+1\right)+\log\left(x^{4}-1\right)^{6}$

12. Sabiendo que $\log 2=0.301\ y\ \log 3=0.477$ calcula: $a)\ \log 48\ ;\ b)\ \log 45\ ;\ c)\ \log\dfrac{0.125}{0.06}$
13. Con ayuda de la calculadora, obtén un valor aproximado de las siguientes expresiones:

$$a)\ \frac{845^{35}}{723^{30}}\ ;\ \ b)\ 819^{52}\cdot923^{72};\ \ c)\ \sqrt[150]{\frac{2.3\cdot10^{72}}{7.54\cdot10^{-35}}}$$

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bertrand Russell (1872-1970) Filósofo, matemático y escritor inglés.

Ejercicios de Aritmética

1. Racionaliza, efectúa y simplifica las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}-\left(\sqrt{5}-1\right)^2$; $b)\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$; $c)\ \dfrac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}+3}-\dfrac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}-3}$

Sol: $a)\ 2\sqrt{5}+\dfrac{5\sqrt{6}}{3}-6$; $b)\ \dfrac{8\sqrt{15}-\sqrt{6}+16\sqrt{3}}{8}$; $c)\ 6\sqrt{7}$

2. Efectúa y simplifica: $a)\ \sqrt{10-2\sqrt{7}}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{7}}$; $b)\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$; $c)\ 3\sqrt{112}-\left(2\sqrt{7}-3\right)^2+\sqrt{28}$

Sol: $a)\ 6\sqrt{2}$; $b)\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; $c)\ 26\sqrt{7}-37$

3. Expresa en forma de intervalo: $a)\ |5x+2|<3$; $b)\ |2x-5|-|x+3|<6$; $c)\ |x-3|>2$

Sol: $a)\ \left(-1,\dfrac{1}{5}\right)$; $b)\ \left(-\dfrac{4}{3},14\right)$; $c)\ (-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

4. Halla el coeficiente de x^5 en el desarrollo de $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)^{15}$ *Sol*: $-5\cdot 3^{15}$

5. Calcula el coeficiente correspondiente a x^6 en el desarrollo de $\left(\sqrt{x}-2x\right)^7$ *Sol*: –672

6. Expresa los siguientes logaritmos en función de $\log 2$ y $\log 3$

$a)\ \log 43.2$; $b)\ \log 0.024$; $c)\ \log 1.8$; $d)\ \log_2 \sqrt[3]{15}$; $e)\ \log_3\left(3.6\cdot\sqrt{1.2}\right)$

7. Aplica las propiedades de los logaritmos para calcular los siguientes valores:

$a)\ \log_{1/2}\dfrac{\sqrt[6]{32}\cdot 8^2}{2\cdot\sqrt[3]{4}}$; $b)\ \log_{1/3}\dfrac{9\cdot\sqrt[4]{27}}{3^3\cdot\sqrt[5]{729}}$; $c)\ \log_5\left(125\cdot\sqrt[4]{25}\right)$; $d)\ \log_7\left(49\cdot\sqrt{343}\right)$

Sol: $a)\ -\dfrac{31}{6}$; $b)\dfrac{29}{20}$; $c)\dfrac{7}{2}$; $d)\ \dfrac{7}{2}$

8. Calcula el valor de S en cada caso:

$a)\ \log S=\log 7-\log x+2\log y-4\log z$ $\quad Sol: S=\dfrac{7y^2}{xz^4}$

$b)\ \log S=\log(x-y)-\log\left(x^2-y^2\right)+1$ $\quad Sol: S=\dfrac{10}{x+y}$

$c)\ \log S=3\log\left(x^2+4\right)-\log\left(x^4-16\right)^3$ $\quad Sol: S=\dfrac{1}{\left(x^2-4\right)^3}$

Cuando quieres realmente una cosa, todo el Universo conspira para ayudarte a conseguirlo.

Paulo Coelho.

Ejercicios de Álgebra

1. Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $x^4+3x^3-2x^2+6x-8=0$ *Sol*: –4 y 1
2. Calcula las raíces del polinomio $P(x)=x^3-9x^2-x+105$ *Sol*: –3, 5 y 7
3. Resuelve las ecuaciones racionales: $a)\ \dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3-x^2}{x^2}=0$; $b)\ x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x+7}{x+1}$ *Sol*: $a)\ \pm 2$; $b)\ 3;-2$
4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   $a)\ \dfrac{x+1}{2x-1}+\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{7}{4x^2-1}$; $b)\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{5x-1}{x^2+x-2}$; $c)\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{x}{x+1}$

   Sol: $a)\ x_1=-3/2$; $x_2=1$; $b)\ x=-3$; $c)$ No tiene solución
5. Resuelve estas ecuaciones irracionales:

   $a)\ \sqrt{x+4}+\sqrt{2x-1}=6$; $b)\ \sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4}$; $c)\ x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

   Sol: $a)\ x=5$; $b)\ x=4$; $c)\ x=\pm 3$
6. Resuelve las siguientes ecuaciones: $a)\ (3x-1)(x+2)(x-4)=0$; $b)\ (x-1)(3x+2)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$
7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log x+\log 2=1+\log 3$ b) $\log x^2-\log 3=\log x+\log 5$

   c) $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$ d) $\log\sqrt{3x+1}+\log 5=1+\log\sqrt{2x-3}$

   e) $\log(22-x)=\log x-1$ f) $\log x+\log(3x+5)=2$

   Sol: a) $x=15$ b) $x=15$ c) $x=3$ d) $x=\dfrac{13}{5}$ e) $x=20$ f) $x=5$
8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^x=32$ b) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=14$ c) $9^x-6\cdot 3^{x+1}+81=0$

   d) $5^x+5^{1-x}=6$ e) $3^{3x-2}=9^{x^2-2}$ f) $25^x-5^{x+1}+6=0$

   Sol: a) $x=5$ b) $x=2$ c) $x=2$ d) $x=0$; $x=1$ e) $x=-\dfrac{1}{2}$; $x=2$ f) $x=\log_5 2$; $x=\log_5 3$
9. Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

   $a)\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x+3y+z=-1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$; $b)\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 2x+y-2z=-6 \\ 4x-y-z=3 \end{cases}$; $c)\begin{cases} y+3z=16 \\ 2x+z=5 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$

   Sol: $a)\ (x,y,z)=(1,0,1)$; $b)\ (x,y,z)=(1,-2,3)$; $c)\ (x,y,z)=(0,1,5)$
10. De un trapecio isósceles sabemos que el triple de la base menor es el doble de la altura; la suma de las dos bases y la altura es 9; y el doble de la base menor más el triple de la base mayor menos la altura es 13. ¿Cuáles son sus dimensiones? *Sol*: $(B,b,h)=(4,2,3)$
11. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

   $a)\begin{cases} x^2+y^2=202 \\ x+y=20 \end{cases}$; $b)\begin{cases} \log(x+2y)=\log 50 \\ \log x+\log y=2+\log 2 \end{cases}$; $c)\begin{cases} 2^x+3^y=11 \\ 4^x+9^y=85 \end{cases}$; $d)\begin{cases} x+y=33 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

   Sol:

   $a)\ (x_1,y_1)=(9,11)$; $(x_2,y_2)=(11,9)$; $b)\ (x_1,y_1)=(10,20)$; $(x_2,y_2)=(40,5)$

   $c)\ (x_1,y_1)=(1,2)$; $(x_2,y_2)=(\log_2 9;\log_3 2)$; $d)\ (x,y)=(30,3)$

Ejercicios de Álgebra

1. Resuelve la siguiente ecuación polinómica: $4x^5+8x^4-15x^3-5x^2+11x-3=0$ *Sol*: −3, −1, 1,y 1/2
2. Calcula las raíces reales del polinomio $P(x)=3x^5+x^3+3x^2+1$ *Sol*: −1.
3. Resuelve las ecuaciones racionales: $a)\ \dfrac{3}{x^3}-\dfrac{x+1}{x^2}=0$; $b)\ \dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{x-1}{x^2-9}=\dfrac{x+5}{x-3}$

   Sol: $a)\ \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; $b)\ 8\pm5\sqrt{3}$
4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   $a)\ \dfrac{x+2}{2x-3}+\dfrac{x}{2x+3}=\dfrac{5}{4x^2-9}$; $b)\ \dfrac{2-x}{x}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{5x}{x^2-x-2}$; $c)\ \dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x+2}=-2$

   Sol: $a)\ x=-1/2$; $b)\ x=-\sqrt[3]{2}$; $c)\ -2\pm\sqrt{11}$
5. Resuelve estas ecuaciones irracionales:

   $a)\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+9}=2-x$; $b)\ \sqrt{1-x}=10-\sqrt{x^2-15}$; $c)\ x=-2+\sqrt{2x^2-1}$

   Sol: $a)\ x=4$; $b)\ x=-8$; $c)\ x_1=-1$; $x_2=5$
6. Resuelve las siguientes ecuaciones: $a)\ (x-1)(x^2+2)(x-3)=0$; $b)\ (x+2)^3(3x-1)(x+\sqrt{3})=0$
7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log(2x)-\log 3=\log(x-1)+\log 3$ b) $2\log(x-2)+\log 5=\log(3x-2)+\log(x-1)$

   c) $\log\sqrt{2x+8}-\log x=\log 6$ d) $\log\sqrt{x+5}+\log\sqrt{x-5}=1$

   e) $4\log x=\log\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)+\log 5$ f) $\log(3x-2)-\log(4x-1)=-\log 2$

   Sol: a) $x=9/7$ b) $x=6$ c) $x=1/2$ d) $x=5\sqrt{5}$ e) $x_1=1$; $x_2=2$ f) $x=3/2$
8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^{3x-1}=\sqrt[4]{2}$ b) $3^x+3^{2-x}=10$ c) $2^{4x}-2^{2x}-12=0$

   d) $3^{2x+2}-28\cdot3^x=-3$ e) $5^{3x-2}=25^{x^2-2}$ f) $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x=127$

   Sol:

   a) $x=5/12$ b) $x_1=0$; $x_2=2$ c) $x=1$ d) $x_1=-2$; $x_2=1$ e) $x=-\dfrac{1}{2}$; $x=2$ f) $x=6$
9. Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

   $a)\left\{\begin{array}{l} x\quad\ -4z=-11\\ x+4y\quad\ =9\\ 3x+3y-4z=2\end{array}\right.$; $b)\left\{\begin{array}{l} -x+y+4z=36\\ -5x-3y+2z=-10\\ 3x+3y-z=17\end{array}\right.$; $c)\left\{\begin{array}{l} 4x-y-3z=-23\\ 3x+3y-2z=0\\ -5x-2y-3z=-45\end{array}\right.$

   Sol: $a)\ (x,y,z)=(5,1,4)$; $b)\ (x,y,z)=(1,-2,3)$; $c)\ (x,y,z)=(2,4,9)$
10. Resuelve los siguientes sistemas:

    $a)\left\{\begin{array}{l} 2^x+5^y=9\\ 2^{x-1}+5^{y+1}=9\end{array}\right.$; $b)\left\{\begin{array}{l} 2\log x-3\log y=5\\ 3\log x+\log y=2\end{array}\right.$; $c)\left\{\begin{array}{l} 2^x+2^y=10\\ 2^{x-y}=4\end{array}\right.$; $d)\left\{\begin{array}{l} x-y=2\\ \log x-\log y=1\end{array}\right.$

    Sol:

    $a)\ (x,y)=(3,0)$; $b)$ No tiene solución ; $c)\ (x,y)=(3,1)$; $d)\ (x,y)=(20/9,2/9)$

Inecuaciones

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 3x-3y+z=-8 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y+z=-4 \\ x+3y-2z=9 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$

Sol: $a)\ (x,y,z)=(-1,1,8)$; $b)\ (x,y,z)=(-1,1,-2)$; $c)\ (x,y,z)=(2,3,1)$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x-3<x-1$ b) $\frac{3x-2}{2}\leq\frac{2x+7}{3}$ c) $-3x-2<5-\frac{x}{2}$ d) $\frac{3x}{5}-x>-2$

Sol: $a)\ x\in(-\infty,2)$; $b)\ x\in(-\infty,4)$; $c)\ x\in\left(-\frac{14}{5},+\infty\right)$; $d)\ x\in(-\infty,5)$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-x^2-2x+3\geq 0$ b) $5-x^2<0$ c) $x^2+3x>0$ d) $-x^2+6x-5\geq 0$

Sol: $a)\ x\in[-3,1]$; $b)\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$; $c)\ x\in(-\infty,-3)\cup(0.+\infty)$; $d)\ x\in[1,5]$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una variable:

a) $\begin{cases} 4x-3<1 \\ x^2-6\leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2>-7 \\ 5-x^2<1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5-x^2>-11 \\ 16-2x<3x-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x^2+5<10 \end{cases}$

Sol: $a)\ x\in[-3,1)$; $b)\ x\in\left(-\frac{5}{3},2\right)$; $c)\ x\in\left(\frac{19}{5},4\right)$; $d)\ \nexists$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con dos variables:

a) $x+y-2\geq 0$; b) $2x-3y\leq 6$; c) $\frac{x-3y}{2}\leq 3$; d) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\geq 1$

6. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables e indica los vértices del conjunto solución:

a) $\begin{cases} 2x+y\geq 3 \\ x\leq 3 \\ y\leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y\leq 3 \\ y\leq 2 \\ x>=-2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y\leq 5 \\ x+y\leq 8 \\ x\geq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\leq 0 \\ x-y\leq 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y\geq 1 \\ x\leq 3 \\ -x+y\leq 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-3y\leq 3 \\ 2x+y\leq 5 \\ x\geq 1 \end{cases}$

Los vértices solución:

$a)\ A\left(-\frac{1}{2},4\right)$, $B(3,-3)$, $C(3,4)$; $b)\ A(5,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-5)$; $c)\ A\left(\frac{21}{5},\frac{19}{5}\right)$, $B(1,7)$, $C(1,-1)$

$d)\ A(0,0)$, $B(0,-5)$, $C(5,0)$; $e)\ A(0,1)$, $B(3,1)$, $C(3,4)$; $f)\ A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$, $C(1,3)$

"Quien volviendo a hacer el camino viejo aprende el nuevo, puede considerarse un maestro".
Confucio (551-479 a. C.); filósofo chino.

GEOMETRÍA ANALÍTICA: El plano afín

1. Las coordenadas de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respecto de una base son $\vec{a}=(2,-3)$ y $\vec{b}=(-4,1)$. Calcula las coordenadas, respecto de la misma base, de cada uno de los siguientes vectores: $\vec{a}+\vec{b};\ \vec{a}-\vec{b};\ 3\vec{a}-5\vec{b}$.

2. Dados los vectores del plano $\vec{a}=(3,-3),\ \vec{b}=(4,1)\ y\ \vec{c}=(3,-2)$, expresa el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

3. Dado el sistema de referencia $\mathbb{R}^2=\left\{A=(-3,2);\quad \vec{u}=(2,1),\quad \vec{v}=(-1,2)\right\}$, comprueba si la base es ortogonal. Halla las coordenadas del punto $B=(4,2)$ respecto de dicho sistema.

4. Dados los vectores $\vec{a}=(4,3)$ y $\vec{b}=(1,7)$, halla la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

5. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}=(5,9)$ y $\vec{v}=(-3,6)$

6. Determina el valor de *x* para que el producto escalar de $\vec{a}=(x,1)$ y $\vec{b}=(2,3)$ sea igual a 9.

7. Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}$ sabiendo que forma un ángulo de 60º con el vector $\vec{a}=(2,3)$ y un ángulo de 90º con el vector $\vec{b}=(0,5)$. No existe

8. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$. ¿Qué se puede afirmar de la dirección y del sentido de los vectores dados? ¿Cuánto vale su producto escalar?

9. Calcula el punto medio del segmento determinado por los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,-5)$.

10. Dado el triángulo de vértices $A(1,1);\ B(5,2)\ y\ C(3,4)$ se traslada mediante el vector $\vec{v}=(6,5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo, una vez trasladado?

11. Estudia si los vectores $\vec{u}=(-1,1)$ y $\vec{v}=(0,2)$ forman una base del plano. En caso afirmativo, expresa los vectores $\vec{a}=(5,2)$ y $\vec{b}=(-3,-2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

12. Calcula el vértice *D* de un paralelogramo *ABCD* sabiendo que $A=(1,2);\ B=(5,-1)\ y\ C=(6,3)$.

13. Si el ángulo que forman dos vectores es obtuso, ¿qué signo tiene su producto escalar?

14. Halla un vector ortogonal a $\vec{u}=(3,-4)$ y de módulo 10.

15. Dados los vectores $\vec{u}=(-3,-2)$ y $\vec{v}=(-4,3)$ comprueba que $\left|-3\vec{u}\right|=3\left|\vec{u}\right|$. Halla las coordenadas del vector $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$

Matemática pura: Matemática que se dedica al estudio de los conceptos y teorías matemáticas, con independencia de sus posibles aplicaciones a la realidad, o de su utilización para resolver problemas surgidos en otras ciencias.

Geometría analítica

H2_Bach CC

1. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas y continua de la recta que pasa por los puntos $A(3,5)\ y\ B(1,4)$ *Sol*: Ec vectorial: $(x,y)=(3,5)+t(2,1)$
2. En el triángulo de vértices $A(5,2);\ B(-3,6)\ y\ C(1,-4)$ halla la ecuación de las medianas y las coordenadas del baricentro. *Sol*: $x=1;\ x-6y+7=0;\ 7x+6y-15=0;\ G(1,4/3)$
3. Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P(2,3)\ y\ Q(-1,-4)$. ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos *P*, *Q* y el punto medio entre *P* y *Q*?
4. Halla un punto *P* situado dentro del segmento de extremos $A(3,4)\ y\ B(0,-2)$, de modo que lo divida en dos partes tales que una sea el doble que la otra, es decir $BP=2PA$.

   Sol: $P(2,2)$
5. Halla las coordenadas de los vértices de un triángulo, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M(3,4);\ N(1,3)\ y\ P(4,-2)$

   Sol: $A(0,9);\ B(6,-1)\ y\ C(2,-3)$
6. Calcula el valor de *a* y *b* para que las rectas $ax-2y+3=0\ y\ bx+8y-5=0$, sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto $P(-1,1)$ *Sol*: $a=\dfrac{16}{3};\ b=3$
7. Un rombo *ABCD*, tiene su vértice *A* en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuestos son $B(3,1)\ y\ D(-5,-3)$. Determina: a) las coordenadas de los vértices *A* y *C*; b) el ángulo que forman sus lados; c) el valor de su superficie. *Sol*: $A(0,-3);\ C(-2,1);\ \ 53^{\circ}7'48'';\ 20u^2$
8. Halla las ecuaciones de las alturas de un triángulo determinado por los vértices $A(1,1);\ B(-3,2)\ y\ C(-1,-4)$ y calcula las coordenadas del ortocentro.

   Sol: $4x-y=0;\ x-3y+2=0;\ 2x+5y-4=0;\ O\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{8}{11}\right)$
9. Calcula el valor de *a* para que las rectas $x+y-6=0\ \ y\ \ ax+y-5=0$ formen un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ radianes. *Sol*: $a=2\pm\sqrt{3}$
10. Halla una recta *r* que determine con las rectas $x+5y-3=0\ \ y\ \ 5x+y+3=0$ un triángulo isósceles que tenga su baricentro en el punto $G(3/4,-3/4)$ *Sol*: $x-y-3=0$
11. Escribe la ecuación de una recta que pase por el punto $P(2,-4)$. ¿Cuál de todas ellas pasa, además, por el punto $Q(0,8)$? ¿Cuál de todas ellas sería paralela a la recta $3x+2y=9$?

    Sol: $y+4=m(x-2);\ \ m=-6;\ \ m=-3/2$
12. Dadas las rectas $r\equiv 2x-y-6=0\ \ y\ \ s\equiv x+2y-8=0$, halla las ecuaciones de sus bisectrices. *Sol*: $b_1\equiv x-3y+2=0\ \ y\ \ b_2\equiv 3x+y-14=0$
13. Calcula el valor de *m* para que las rectas $mx+y=12\ \ y\ \ 4x-3y=m+1$ sean paralelas y halla su distancia. *Sol*: $m=-4/3;\ \ d=107/15$
14. Halla las coordenadas del punto simétrico del origen respecto de la recta $4x+3y=5$.

    Sol: $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$

Geometría Analítica

1. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan 2 unidades de la recta $r \equiv 4x+3y-1=0$ *Sol*: $4x+3y-11=0;\ 4x+3y+9=0$
2. Estudia si los puntos $A(1,-2);\ B(-5,1)\ y\ C(7,-5)$ están alineados y si los puntos *B* y *C* equidistan del punto *A*. *Sol*: Sí están alineados y sí son equidistantes de *A*.
3. La pendiente de una recta que pasa por el punto $A(3,2)$ es igual a ¾ . Sitúa dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades del punto *A*. *Sol*: $(7,5)\ y\ (-1,-1)$
4. Halla las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: $M(-2,1);\ N(5,2)\ y\ P(2,-3)$. *Sol*: $(1,6);\ (9,-2)\ y\ (-5,-4)$
5. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,4)$ y tal que la tangente del ángulo que forma dicha recta con el eje de abscisas sea 2. *Sol*: $2x-y+4=0$
6. Halla la superficie de un triángulo cuyos vértices son los puntos $A(0,9);\ B(-4,-1)\ y\ C(3,2)$ Escribe la ecuación de la mediana correspondiente al vértice *C*.
7. Dadas las rectas $y=5-2x;\ y=2x-3$, determina las coordenadas de su punto de intersección y la ecuación de la recta que pasa por ese punto y es tal que la razón entre la ordenada y la abscisa en cualquiera de sus puntos es ½. *Sol*: $x-2y=0$
8. ¿Es cierto que las diagonales de cualquier cuadrilátero se cortan en su punto medio? En caso negativo pon un ejemplo que lo demuestre. *Sol*: No es cierto. Trapecio isósceles.
9. Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya ordenada es tres veces su abscisa. *Sol*. $y=3x$
10. Dada la recta $ax+by=1$, determina *a* y *b* sabiendo que la recta dada es perpendicular a la recta de ecuación $2x+4y=11$ y que pasa por el punto $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$. *Sol*: $4x-2y=1$
11. Si la distancia entre dos rectas es cero, ¿se puede afirmar que son secantes? Justifica la respuesta.
12. Sean $r(A,\vec{u})\ y\ s(B,\vec{u})$ dos rectas que son paralelas, por tener el mismo vector director. ¿Es cierto que $d(r,s)=d(A,B)$? Justifica la respuesta.
13. Dada la recta de ecuación $3x+4y-7=0$ calcula la distancia del origen a la recta y el ángulo que forma el vector normal con el eje de abscisas. *Sol*: $\frac{7}{5};\ \arccos\frac{3}{5}=53^{\circ}07'48''$
14. Reduce la ecuación general de la circunferencia $3x^2+3y^2+6x-5y=0$ a la forma "centro-radio". *Sol*. $\left(x+1\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{61}{36}=0$
15. Halla la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(3,-1)$ y que es tangente a la recta $3x+y+2=0$. *Sol*. $\left(x-3\right)^2+\left(y+1\right)^2=10$
16. Calcula la ecuación de la circunferencia, de radio 5 unidades, que pasa por el punto $A(3,5)$ y cuyo centro se halla en la recta $3x-y+1=0$. *Sol*: $C(0,1);\ C'(3,10)$

Geometría analítica: La circunferencia

1. a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,3)$ y es paralela a la recta $3x-2y+12=0$. *Sol*: $3x-2y+3=0$

   b) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2,-1)$ y es perpendicular a la recta $4x+2y-6=0$. *Sol*: $x-2y=0$

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=25$ en el punto $P\left(4,1\right)$. *Sol*: $3x+4y-16=0$

3. Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es el punto $C(1,2)$ *Sol*: $\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$

4. Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ con la recta $y=x$ *Sol*: $(1,1);\ (3,3)$

5. Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3);\ B(0,3)\ y\ C(-1,0)$.

   Sol: $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$

6. Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(-1,3)$ y pasa por el punto $P(-2,1)$ *Sol*: $\left(x+1\right)^2+\left(y-3\right)^2=5$

7. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $A(1,1)\ y\ B(3,-1)$ *Sol*: $\left(x-2\right)^2+y^2=2$

8. Calcula la longitud de la cuerda que determina la recta $x=3$ al cortar a la circunferencia $x^2+y^2-4x-6y+8=0$. *Sol*: 4.

9. Calcula la ecuación de una circunferencia tangente a los ejes coordenados y que pasa por el punto $A(9,2)$ *Sol*: $C(5,5),\ r=5;\ C(17,17),\ r=17$

10. Halla la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados están sobre las rectas $x-2y+1=0;\ x+3y=14;\ 2x+y=3$ *Sol*: $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=10$

11. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son circunferencias, y determina en su caso el centro y el radio:

12. $a)\ x^2-y^2-4x-4y+2=0;\quad b)\ 2x^2+2y^2-2x-2y-1=0;\quad c)\ x^2+y^2-4x-2y=-1$

    Sol: $a)\ No;\quad b)\ C(\frac{1}{2},\frac{1}{2});\ r=1\quad c)\ C(2,1);\ r=2$

13. Halla el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto de los triángulos cuyas hipotenusas son el segmento que determinan los puntos $P(0,3)\ y\ Q(2,3)$

    Sol: Una circunferencia, $\left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2-1=0$

14. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(4,3),\ B(-2,3)$ y tiene su centro en la recta $2x-y-1=0$. *Sol*: $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=13$

Geometría analítica: La elipse

1. Halla los elementos principales de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

   Sol: $a=5;\ b=4;\ c=3;\ e=\frac{3}{5};\ F(0,3);\ F'(0,-3).$

2. Escribe la ecuación reducida de una elipse cuyo centro es el punto $C(-1,3)$, sabiendo que su distancia focal es de 10 unidades y el semieje mayor que tiene una longitud de 13 unidades métricas es paralelo al eje de abscisas. *Sol*: $\frac{(x+1)^2}{169}+\frac{(y-3)^2}{144}=1$

3. Calcula la ecuación de la elipse formada por los puntos cuya suma de distancias a $F(7,-1)\ y\ F'(1,-1)$ es igual a 10. *Sol*: $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

4. Encuentra los elementos principales de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

   Sol: $a=5; b=3; c=4; F(-4,0); F'(4,0);\ e=\frac{4}{5}$

5. Escribe la ecuación reducida de la elipse cuya distancia focal es 16 y cuyo semieje mayor tiene de longitud 10 unidades. *Sol*: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

6. Determina la ecuación reducida de la elipse cuyo eje mayor mide 18 y pasa por el punto $P(6,5)$. Escribe todos sus elementos notables:

   Sol: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1\quad a=9;\ b=3\cdot\sqrt{5};\ c=6;\ e=2/3;\ F(6,0);\ F'(-6,0)$

7. Escribe la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a los puntos $F(6,0)\ y\ F'(-6,0)$ vale 20 unidades métricas. *Sol*: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

8. Encuentra la expresión reducida de una elipse de focos $F(1,1)\ y\ F'(1,-1)$ y cuyo semieje mayor tiene una longitud de 2 unidades métricas. *Sol*: $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

9. Halla la ecuación de la elipse centrada en el origen y cuyo eje mayor se asienta sobre el eje de abscisas, que pase por los puntos $(4,3)\ y\ (6,2)$ *Sol*: $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$

10. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos fijos $(4,2)\ y\ (-2,2)$ sea igual a 8. *Sol*: $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{7}=1$

Un libro abierto es un cerebro que habla; cerrado, un amigo que espera; olvidado, un alma que perdona; destruido, un corazón que llora,… (Proverbio hindú)

Geometría analítica: La parábola

1. Determina el parámetro *p*, el vértice, el foco, el eje y la directriz de las siguientes parábolas: $a)\ y^2=16x \quad b)\ y^2=6x \quad c)\ x^2=12y$

   $a)\ p=8;\ V(0,0);\ F(4,0);\ eje\ y=0;\ d: x=-4$
   Sol: $b)\ p=3;\ V(0,0);\ F(3/2,0);\ eje\ y=0;\ d: x=-3/2$
   $c)\ p=6;\ V(0,0);\ F(0,3);\ eje\ x=0;\ d: y=-3$

2. Escribe la ecuación reducida de las siguientes parábolas y halla el parámetro *p*, el vértice, el foco, el eje y la directriz: $a)\ y^2-4y-8x+36=0; \quad b)\ x^2-4x-16y+36=0$

   Sol: $a)\ (y-2)^2=8(x-4);\ p=4;\ V(4,2);\ F(6,2);\ eje\ y=2;\ d: x=2$
   $b)\ (x-2)^2=16(y-2);\ p=8;\ V(2,2);\ F(2,6);\ eje\ x=2;\ d: y=-2$

3. Halla la ecuación de la parábola de foco $F(2,0)$ y directriz la recta $x=4$. ¿Cuál es su vértice? *Sol*: $y^2=-4(x-3);\ V(3,0)$

4. Escribe la ecuación reducida de la parábola de vértice el punto $V(3,2)$ y foco $F(5,2)$.

   Sol: $p=4;\ (y-2)^2=8(x-3)$

5. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice es el origen de coordenadas, su eje de simetría es el eje de ordenadas y que pase por el punto $P(6,-3)$. *Sol*: $x^2=-12y$

6. Dada la parábola de ecuación $y^2+8y-6x+4=0$, halla su ecuación reducida, las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de su directriz.

   Sol: $(y+4)^2=6(x+2);\ V(-2,-4);\ F(-1/2,-4);\ x=-7/2$

7. Una parábola de eje vertical tiene por vértice $V(3,2)$ y su foco se halla en el punto $F(3,0)$. Halla las ecuaciones del eje, de la directriz y de la parábola.

   Sol: $x=3;\ y=4;\ (x-3)^2=-8(y-2)$

8. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2=6x$ en el punto $P(6,6)$. (Observación: la tangente es la bisectriz del ángulo que forman el radio vector *PF* y la recta perpendicular por *P* a la directriz).

   Sol: $d: x-3/2=0;\ \perp d\ por\ P: y=6;\ F(3/2,0);\ r\equiv x-2y+6=0$

9. Halla la longitud del segmento interceptado por la recta $r: x-3y+4=0$ en la parábola $y^2=2x$. *Sol*; $2\sqrt{10}$.

10. Encuentra la recta tangente a la parábola $y^2=4x$ en el punto $P(1,-2)$.

    Sol: $x+y+1=0$ (Observación: el punto *P* se halla en el cuarto cuadrante).

La geometría es una ciencia del conocimiento del ser, pero no de lo que está sujeto a la generación y a la muerte. La geometría es una ciencia de lo que siempre es. Platón

Geometría analítica: La Hipérbola

1. Calcula los elementos principales de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$ Sol: $a = 3;\ b = 2;\ c = \sqrt{13}$

2. Escribe la ecuación reducida de la hipérbola en la que uno de sus focos es $F(17,0)$ y uno de sus vértices es $V(15,0)$. Halla todos los demás elementos. Sol: $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

3. Escribe la ecuación reducida de la hipérbola en la que una de sus asíntotas es $y = \dfrac{1}{2}x$ y que pasa por el vértice $V(2,0)$. Sol: $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

4. Encuentra los elementos de las siguientes hipérbolas:

   $a)\ 9x^2 - 16y^2 = 144$; $b)\ -\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{144} = 1$; $c)\ \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

   Sol: $a\ y\ c)\ V(\pm 6,0);\ F(\pm 10,0);\ y = \pm\dfrac{4}{3}x;\ e = \dfrac{5}{3}$

   $b)\ V(0,\pm 12);\ F(0,\pm 13);\ y = \pm\dfrac{5}{12}x;\ e = \dfrac{13}{12}$

5. Halla la ecuación reducida de la hipérbola cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F(5,0)\ y\ F'(-5,0)$ es 6. Sol: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

6. Determina la ecuación de una hipérbola (centrada en el origen) que tiene por excentricidad $e = 5/3$ y es incidente con el punto $P(10, 32/3)$. Sol: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

7. Halla la ecuación de la hipérbola incidente con los puntos $A(4,\sqrt{6})\ y\ B\left(12, 6\sqrt{2}\right)$

   Sol: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$

8. Una hipérbola tiene por asíntotas $y = \pm 2x$ y es incidente con el punto $P(6,4)$. Escribe su ecuación. Sol: $\dfrac{x^2}{32} - \dfrac{y^2}{128} = 1$

9. De una hipérbola se conoce $a = 4$ y además el ángulo que forman sus asíntotas es de 90º. Halla su ecuación. Sol: $x^2 - y^2 = 4$; la ecuación referida a sus asíntotas es $xy = 2$.

10. Calcula el valor de *b* para que $2x^2 + by^2 = 3$ sea la ecuación de una hipérbola equilátera.
    Sol: $b = -2$.

11. Escribe la ecuación reducida de una hipérbola sabiendo que su distancia focal es 16 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 4. Sol: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1;\ \dfrac{x^2}{48} - \dfrac{y^2}{16} = -1$

Geometría Analítica

1. Calcula el área del triángulo de vértices $A(-2,0);\ B(6,-1)\ y\ C(3,1)$ *Sol*: 13/2.
2. Calcula la distancia del punto $A(2,1)$ a la recta de ecuación $4x+3y+6=0$ *Sol*: 17/5
3. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua y general de la recta que pasa por el punto $A(1,2)$ y cuyo vector director es $(2,5)$.
4. Calcula el valor de a para que las rectas $14x+12y-6=0\ y\ -7x+ay+12=0$ sean paralelas. *Sol*: $a=-6$
5. Calcula las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas
   $r: 4x-3y=0\ y\ r':5x+12y-4=0$ *Sol*: $27x-99y+20=0\ y\ b_2: 77x+21y-20=0$
6. Calcula el ángulo que forman las rectas $r: 2x+3y-6=0$ y $s: 5x+y-2=0$ *Sol*: 45º.
7. Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $-x+2y+1=0$ y que pasa por los puntos $A(0,2)\ y\ B(2,1)$ *Sol*: $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$
8. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas paralelas $r: x+y-6=0\ y\ s: x+y-4=0$ *Sol*: $x+y-5=0$
9. Halla la ecuación de una elipse cuyo eje mayor coincide con el eje de ordenadas, sabiendo que la distancia focal es de 16 cm y el eje mayor mide 34 cm. Calcula también la excentricidad, los focos y los vértices.
10. Escribe la ecuación reducida de la elipse $8x^2 9y^2-48x-72y-936=0$ y halla todos sus elementos. *Sol*: $\frac{(x-3)^2}{144}+\frac{(y-4)^2}{128}=1;\ F(\pm 7,4);\ A(\pm 15,4); B\left(3,4\pm 8\sqrt{2}\right); e=\frac{1}{3}$
11. Calcula los elementos notables de la hipérbola de ecuación: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

    Sol: $a=2;\ b=\sqrt{5};\ c=3;\ e=3/2;\ F(\pm 3;0); A(\pm 2,0); B\left(0,\pm\sqrt{5}\right)$
12. Dada la ecuación de la hipérbola equilátera de ecuación asintótica $xy=3$, halla la ecuación de la hipérbola referida a los ejes y sus elementos.

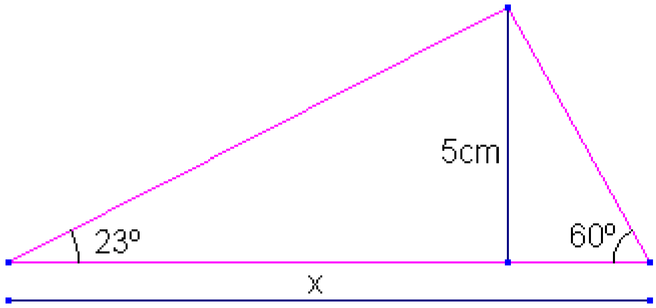
    Sol: $a=\sqrt{6};\ x^2-y^2=6;\ F\left(\pm 2\sqrt{3},0\right); A\left(\pm\sqrt{6},0\right); B\left(0,\pm\sqrt{6}\right); e=\sqrt{2}$
13. Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $y=-2$ y por vértice el punto $V(4,1)$ *Sol.* $12(y-1)=(x-4)^2$
14. Halla la ecuación de una parábola que tiene por directriz la recta $x+1=0$ y por vértice el punto $V(3,1)$.

    Sol: Como $VD=4$, $p=8$, luego $F(7,1)$. Si $P(x,y)$ es un punto cualquiera de la parábola se tendrá: $\overline{PF}=\overline{PD}$, es decir $\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=|x+1|$. Elevando al cuadrado y simplificando se tiene: $16(x-3)=(y-1)^2$.

<u>Trigonometría</u>

H9_Bach CC

1. De un ángulo situado en el segundo cuadrante se sabe que $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Determina las restantes razones trigonométricas.
2. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:
$120^\circ = \frac{2\pi}{3} rad$; $135^\circ = \frac{3\pi}{4} rad$; $150^\circ = \frac{5\pi}{6} rad$; $210^\circ = \frac{7\pi}{6} rad$; $225^\circ = \frac{5\pi}{4} rad$; $240^\circ = \frac{4\pi}{3} rad$
3. Se sabe que $\tan\alpha = -3$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Halla sin, cos y tan de los ángulos α, $\pi + \alpha$ y $-\alpha$.
4. Halla la altura de una antena de radio si su sombra mide 100 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 30º con la horizontal.
5. Arturo está haciendo volar su cometa. Ha soltado ya 100 m de hilo y observa que el ángulo que forma el hilo de la cometa con la horizontal es de 60º. ¿Cuál será la altura a la que se encuentre la cometa?
6. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 cm y los ángulos iguales miden 70º. Calcula su área y su perímetro.
7. Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm.
8. Si la sombra de un poste es la mitad de su altura, ¿qué ángulo forman los rayos del sol con el horizonte?
9. Expresa en radianes el ángulo que forman el horario y el minutero de un reloj analógico cuando señalan las 4. ¿Y cuando señalan las 4h y 15 minutos?
10. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 8 cm y uno de sus catetos 5 cm. Calcula el otro cateto y los ángulos de dicho triángulo.
11. Calcula las longitudes y los ángulos del siguiente triángulo:

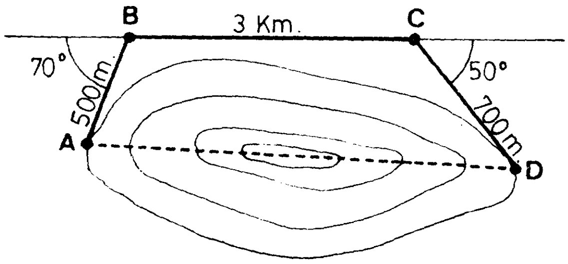


12. En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 2 cm. Halla su ángulo central correspondiente en grados sexagesimales y en radianes.
13. A las tres horas, las agujas del reloj analógico forman un ángulo recto. ¿Al cabo de cuánto tiempo volverán a estar por primera vez formando nuevamente un ángulo recto?
14. Expresa en radianes los ángulos interiores de los siguientes polígonos regulares: triángulo, cuadrado, pentágono, octógono y dodecágono.
15. Desde una nave espacial se ve la Tierra bajo un ángulo de 20º9’48,8’’. Siendo el radio de la Tierra de 6366 km. Halla la distancia de la nave a la superficie terrestre. *Sol*: 30000 km.
16. Halla las razones trigonométricas de un ángulo que mide 1,5 radianes.

Trigonometría II

H10_Bach CC

1. Calcula la longitud del lado de un triángulo sabiendo que su ángulo opuesto es de 30º y el radio de la circunferencia circunscrita mide 6 cm. *Sol*: 6 cm
2. Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que sus lados miden 15, 22 y 17 m.
   Sol: $42º53'43'' \simeq 0.75 rad$; $86º 37'45'' \simeq 1.51 rad$; $50º 28'34'' \simeq 0.88 rad$
3. Calcula la longitud de dos lados de un triángulo, sabiendo que el otro lado mide 6 m y los ángulos correspondientes a los lados desconocidos son 45º y 105º.
4. Calcula la superficie de un pentágono regular de lado 10 cm. *Sol*: 172 cm^2.
5. Calcula la superficie de un octógono regular de lado 10 m. *Sol*: 482.84 m^2.
6. La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 80º. Calcula los lados y la superficie del triángulo. *Sol*:
7. Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100m, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60º. Suponiendo que el hilo esté tirante, halla la distancia a la que se encuentra la cometa del suelo. *Sol*:
8. Las puntas de las ramas de un compás distan 7 cm. y cada rama mide 12 cm. Halla el ángulo que forman las ramas del compás. *Sol*:
9. Los tres cables que sujetan una torre de una emisora de radio tienen sus anclajes en una circunferencia de 200 m de diámetro y forman un triángulo equilátero. Cada cable forma con la horizontal un ángulo de 45º. Halla la altura de la torre. *Sol*: 100 m.
10. Se ha de trazar un túnel AD que atraviese una montaña:



Halla su longitud a partir de los datos que aparecen en la figura. *Sol*: 3621 m.

11. Un avión vuela entre dos ciudades A y B que distan 80 km. Las visuales desde A y B al avión forman ángulos de 29º y 43º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad? *Sol*:
12. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados miden 13 m, 14 m y 15 m. *Sol*:
13. Dos individuos observan un globo que está situado en un plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los individuos es de 4 km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46º y 52º respectivamente. Halla la altura del globo y su distancia a cada observador.

Ejercicios de trigonometría

1. Sabemos que $\sin x = -\frac{2}{3}$. Calcula $\sin(\pi - x)$; $\sin(\pi + x)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. ¿Para qué ángulos es $\sin x = -\cos x$?
3. Escribe una expresión general, expresada en radianes, que determine todos los ángulos cuya tangente sea –1. ¿Cuáles son menores que 2p radianes?
4. Calcula de modo exacto las razones trigonométricas de los ángulos de 15º , 75º y 105º.
5. Resuelve un triángulo del que se conocen los siguientes datos: $\hat{A} = 2\hat{B}$; $a = \sqrt{3}$; $b = 1$

   Sol: $\hat{A} = 60^{o}$; $\hat{B} = 30^{o}$; $\hat{C} = 90^{o}$; $c = 2$
6. Determina las razones trigonométricas del ángulo $2x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, en los casos siguientes:

   $a)\ \sin x = \frac{1}{3} \quad b)\ \tan x = 2 \quad c)\ \cos x = 0.6$
7. Si $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x > \frac{\pi}{2}$ calcula las razones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$
8. Encuentra los posibles valores de x en el intervalo $0^{o} \leq x \leq 360^{o}$ en cada uno de los siguientes casos: $a) \sin 2x = \sin 38^{o} \quad b)\ \cos 2x = \sin 22^{o} \quad c)\ \tan 2x = \tan 60^{o}$
9. Demuestra que $\tan^3 x = \frac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cosec} x - \sin x}$
10. Resuelve en el intervalo $[0;\ 2\pi]$ las ecuaciones:

    $a)\ \sin^2 x + \cos 2x = 1 \quad b)\ \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad c)\ \tan^2 x + 3 = 4\tan x$
11. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0; 2\pi]$:

    $a)\ \sin x = \frac{1}{2} \quad b)\ \sin^2 x - 3\cos^2 x = 0 \quad c)\ \cos 2x = 1 + 2\sin x$
12. Demuestra que $a) \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y \quad b)\ \sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$
13. Resuelve, en el intervalo $[0; 2\pi]$, las ecuaciones:

    $a)\ 2\sin x = \tan x \quad b)\ \cos x - \sin 2x = 0 \quad c)\ \cos^2 x = \sin^2 x$
14. Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forman un ángulo de elevación de 17º. Aproximándose 25 m hacia la orilla en la dirección del árbol, el ángulo es de 32º. Calcula la altura del árbol.

"En todas las cosas parece existir como ley un círculo".
Publius Cornelius Tacitus (55-115); historiador romano.

Números Complejos

1. Calcula:

$a)\ (3+2i)\cdot(5-i)+\overline{(7+4i)}$

$b)\ 3i-(-4+2i)\cdot(2-i)$

$c)\ \overline{\left(-\frac{2}{3}+3i\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-i\right)}$

$d)\ \left(\sqrt{2}+\frac{i}{3}\right)\cdot\overline{(-2-\pi i)}$

$e)\ (1+3i)-(3+2i)\cdot\left[(2-5i)+(1+2i)-(4-4i)\right]+(3+i)\cdot(3-i)$

$f)\ \left[(1+3i)-(3+2i)\right]\cdot\left[(2-5i)+(1-2i)\cdot(2+3i)\right]$

Sol:

$a)\ 24+3i \quad b)\ 6-5i \quad c)\ \frac{17\cdot(2-i)}{12} \quad d)\ -\frac{\pi}{3}-2\sqrt{2}+\left(\pi\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)i \quad e)\ 16+2i \quad f)\ -14+22i$

2. Simplifica la siguiente expresión:

$\left(\frac{2+3i}{3-2i}+\frac{1-i}{2+5i}\right)\cdot\frac{3}{1+i}$ *Sol*: $\frac{57+75i}{58}$

3. Realiza las siguientes divisiones:

$a)\ \frac{1}{i} \quad b)\ \frac{6+5i}{5-i} \quad c)\ \frac{3+2i}{1+3i} \quad d)\ \frac{6i}{1+i} \quad e)\ \frac{-5i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}$

Sol: $a)\ -i \quad b)\ \frac{25+31i}{26} \quad c)\ \frac{9-7i}{10} \quad d)\ 3+3i \quad e)\ \sqrt{2}-\sqrt{3}\ i$

4. Calcula el módulo de los siguientes números complejos:

$a)\ z=5-3i \quad b)\ z=\frac{3-2i}{4+i} \quad c)\ z=\frac{3+2i}{1-4i}\cdot(-5+3i)$

Sol: $a)\ |z|=\sqrt{34} \quad b)\ |z|=\frac{\sqrt{221}}{17} \quad c)\ |z|=\sqrt{26}$

5. Comprueba la propiedad $|z+w|\le|z|+|w|$ en los siguientes casos:

$a)\ z=1+4i;\ w=3-i \quad b)\ z=\frac{1-2i}{3+i};\ w=2i$

Sol:

$a)\ |z+w|=|4+3i|=5;\ |z|+|w|=\sqrt{17}+\sqrt{10}$

$b)\ |z+w|=\frac{\sqrt{170}}{10};\ |z|+|w|=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

Ejercicios de números complejos

1. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:
2. $a)\ -8 \quad b)\ -1-2i \quad c)\ \sqrt{3}-i \quad d)\ -3+4i \quad e)\ -\dfrac{i}{2}$

   Sol: $a)\ 8_{\pi} \quad b)\ \left(\sqrt{5}\ ;\ 243^{\circ}26'6''\right) \quad c)\ 2_{-\pi/6} \quad d)\ \left(5\ ;\ 126^{\circ}52'12''\right) \quad e)\left(\dfrac{1}{2}\right)_{-\pi/2}$
3. Expresa en forma binómico los siguientes números complejos:
4. $a)\ 3_{-\pi} \quad b)\left(\dfrac{3}{4}\right)_{2\pi/3} \quad c)\ 5_{2\pi} \quad d)\ \sqrt{3}_{-\pi/2} \quad e)\left(\sqrt[3]{7,2}\ ;\ -585^{\circ}\right) \quad f)\ \sqrt[4]{8}_{13\pi/6}$

   Sol:
   $a)\ -3 \quad b)\ -0,375+0,6495i \quad c)\ 5 \quad d)\ -\sqrt{3}\,i \quad e)\ -1,3654+1,3654i \quad f)\ 1,4564+0,8409i$

5. Simplifica la siguiente expresión y da el resultado en forma polar y binómica:

   $$\frac{\left(18;40^{\circ}\right)\cdot\left(15;125^{\circ}\right)}{\left(45;50^{\circ}\right)}$$

   Sol: $\left(6;115^{\circ}\right)=6\left(\cos 115^{\circ}+i\sin 115^{\circ}\right)\simeq -2,5357+5,4378i$
6. Calcula las potencias que se indican de los siguientes números complejos, expresando el resultado en forma binómica:

   $a)\ \left(2+3i\right)^{4} \quad b)\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{126} \quad c)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{20} \quad d)\ \left(3-i\right)^{12}$

   Sol: $a)\ \left(169;225^{\circ}14'23''\right)=-119-120i \quad b)\ \left(1;5670^{\circ}\right)=-i$
   $c)\ \left(2^{10};2700^{\circ}\right)=-2^{10} \quad d)\ \left(10^{6};138^{\circ}46'50''\right)=-752192+658944i$
7. Calcula las raíces cúbicas de la unidad y exprésalas en forma trigonométrica y binómica:

   Sol:
   $$\sqrt[3]{1_{0^{\circ}}}=1_{\beta_k};\ \beta_k=\frac{0+2k\pi}{3};\ k=0,1,2$$
   $$\left(1;\beta_0\right)=1_{0^{\circ}}=\cos 0+i\sin 0=1$$
   $$\left(1;\beta_1\right)=1_{2\pi/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
   $$\left(1;\beta_2\right)=1_{4\pi/3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
8. Calcula las raíces cuartas de $16i$ y exprésalas en su forma binómica:

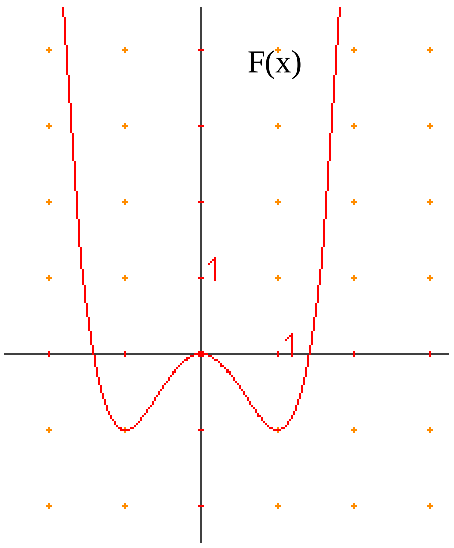
   Sol: $\left(2;\beta_0\right)=1,8477591+0,7653668i \quad \left(2;\beta_1\right)=-0,7653668+1,8477591i$
   $\left(2;\beta_2\right)=-1,8477591-0,7653668i \quad \left(2;\beta_3\right)=0,7653668-1,8477591i$

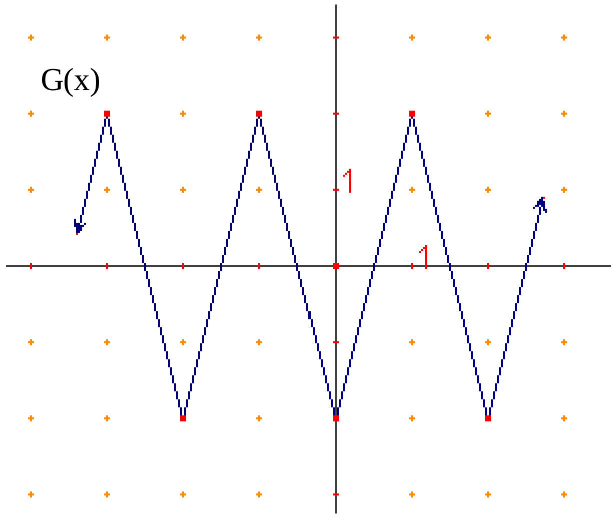
"El trabajo que nunca se empieza es el que tarda más en finalizarse"

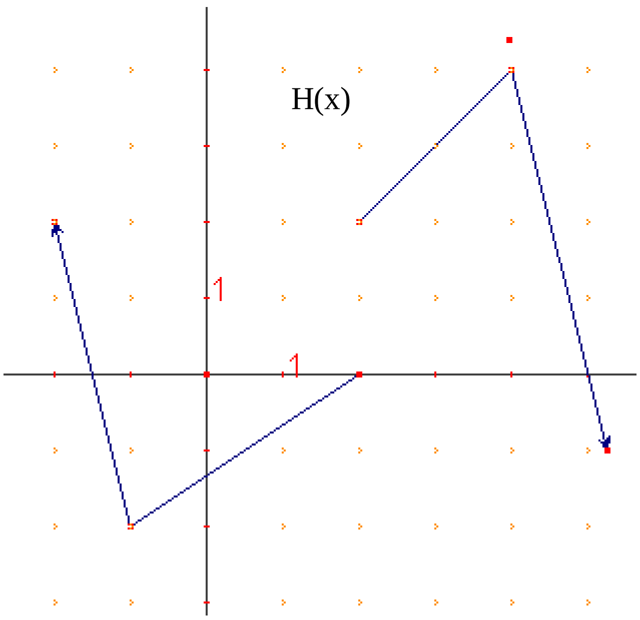
J. R. R. Tolkien (1892-1973), erudito y escritor británico

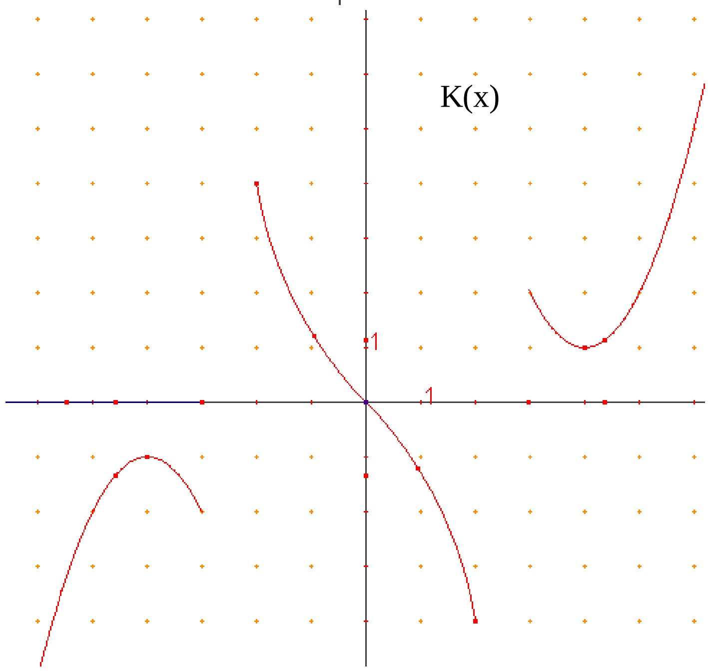
Funciones

1. Determina el Dominio, Recorrido, Simetrías, Periodicidad, Monotonía, Máximos y mínimos, cotas y puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes, a partir de su gráfica. Indica también si son funciones continuas.









2. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

$a)\ y = x^2 - 4;\qquad b)\ y = \dfrac{2x+3}{x-5};\qquad c)\ y = \sqrt[4]{8-x^3}\ ;\qquad d)\ y = \sqrt[3]{3x+7}$

$e)\ y = \dfrac{3x+5}{2x^2+3x+1}\ ;\quad f)\ y = \left|5x^2+7\right|\ ;\quad g)\ y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-4}}\ ;\quad h)\ y = \dfrac{5x-4}{x^3-3x+2}$

3. Determina el campo de definición de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ \ x \le 2 \\ \dfrac{2x+1}{x-3} & si\ \ x > 2 \end{cases}$$

Funciones

1. Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$, $h(x)=|x|+3$ y $k(x)=\dfrac{7}{x}$

   a) Estudia su dominio o campo de definición.

   b) Halla la composición de $(f\circ g)(x)$, $(k\circ h)(x)$, así como su dominio.

   c) Indica si la función $g(x)$ es inyectiva y en caso afirmativo halla su función inversa.

   d) Calcula el dominio de la función $\dfrac{k(x)}{f(x)}$.

2. Estudia las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

$$a)\ f(x)=\sqrt{x-3}\quad b)\ y=\frac{4x}{x-1}\quad c)\ y=\left|x^2-6x+5\right|\quad d)\ y=\frac{x^2-x-2}{x-1}$$

3. De una cierta función se conocen los siguientes datos:

   a) Es creciente en el intervalo $(-\infty,2)$ y decreciente en $(2,+\infty)$

   b) Corta a los ejes coordenados en los puntos $(-1,0),(0,1)$ y $(4,0)$

   c) Cuando la variable *x* tiende a infinito los valores de la función tiende a menos infinito.

   Aproxima la gráfica para una función que se ajuste a esos datos.

4. El tiovivo de una feria, acelera durante dos minutos hasta alcanzar una velocidad de 10 km/h. Permanece en esa velocidad durante 7 minutos y decelera hasta parar en el minuto siguiente. Tras permanecer cinco minutos parado, comienza de nuevo el proceso. Dibuja la gráfica de la función velocidad respecto del tiempo y realiza su estudio.

5. En una empresa han conseguido fabricar unas placas solares para calentar agua de manera que la temperatura del agua, *T*, depende del grosor g de la placa: $T(g)=\dfrac{70g-1}{g}$

   ¿Cuál es el dominio de la función $T(g)$? ¿Cuál es la máxima temperatura que se puede obtener?

6. Estudia y representa las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=-\sqrt{4-x^2}\ ;\quad b)\ f(x)=\frac{7-2x}{x-4}\ ;\quad c)\ f(x)=\sqrt{2x^2-7x+3}\ ;\quad d)\ f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$$

7. Indica el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ x+3 & si\ 0\le x<2\\ \dfrac{2x-5}{x-4} & si\ x>2\end{cases}\quad b)\ g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+2x} & si\ x\le -1\\ \dfrac{3x+1}{\sqrt{1-x}} & si\ x>-1\end{cases}$$

8. Expresa la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-5}{x+4}}$ como composición de tres funciones, siendo una de dichas funciones $k(x)=x-2$. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x)$?

El estudio es el único medio de desarrollar tu mente al máximo.

Flor Leticia Yáñez Caldelas.

Números Complejos

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, en el conjunto de los números complejos:

   $a)\ 3z^2-2z+5=0$; $b)\ -2z^2+6z-5=0$; $c)\ z^2-4z+7=0$; $d)\ z^2+18=0$

   Solución: $a)\ z_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{14}}{3}i$; $z_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{14}}{3}i$ $b)\ z_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

   $c)\ z_1=2+\sqrt{3}\,i$; $z_2=2-\sqrt{3}\,i$ $d)\ z_1=3\sqrt{2}\,i$; $z_2=-3\sqrt{2}\,i$

2. Dados los números complejos $z_1=(2,-1)$ y $z_2=k+2i$, encuentra el valor de k de tal manera que:

   a) $z_1.z_2$ sea un número real; b) $z_1.z_2$ sea un número imaginario puro.

   Solución: a) $k=4$; b) $k=-1$

3. Determina el número real x para que el cociente $\dfrac{x+3i}{3+2i}$ sea:

   a) Un número real.
   b) Un número imaginario puro.
   c) Su afijo esté en la bisectriz del segundo cuadrante.

   Solución: a) $x=\frac{9}{2}$; b) $x=-2$; c) $x=-15$

4. Efectúa las siguientes potencias de números complejos:

   $a)\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^3$ $b)\ \left(-2,2\sqrt{3}\right)^6$ $c)\ \left[\left(3\sqrt{2}\right)_{225^\circ}\right]^4$

   $d)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$ $e)\ \left(2_{40^\circ}\right)^3$ $f)\ \left(\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}\right)^6$

   Solución: a) $27i$; b) 4.096 ; c) -324 ; d) 1 ; e) $-4+4\sqrt{3}i$; f) $8_{\frac{\pi}{2}}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones, en el cuerpo de los números complejos:

   $a)\ z^4+16=0$ $b)\ z^4-2z^3+2z^2=0$

   $c)\ z^6-64z^3=0$ $d)\ z^2+(1-2i)z-1-i=0$

   Solución:

   $a)\ z_1=2_{\frac{\pi}{4}}, z_2=2_{\frac{3\pi}{4}}, 2_{\frac{5\pi}{4}}, 2_{\frac{7\pi}{4}}$ $b)\ z_1=0\,(doble)\ z_2=1+i, z_3=1-i$

   $c)\ z_1=0\,(triple)\ z_2=4, z_3=-2+2\sqrt{3}i, z_4=-2-2\sqrt{3}i$ $d)\ z_1=i, z_2=-1+i$

6. Halla un número complejo cuyo cubo vale -1 y cuya parte imaginaria es negativa. Expresa el resultado en forma binómica y polar. *Solución*: $z=1_{300^\circ}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

7. Halla el número complejo z tal que: $\dfrac{z+i}{z-2i}=2-i$. Expresa el resultado en forma polar.

   Solución: $z=\dfrac{-3+7i}{2}$ $\left(\dfrac{\sqrt{58}}{2}, 113^\circ 11' 55''\right)$

Ejercicios de exponenciales y logaritmos

1. Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales:

   $a)\ y=2^x\ ;\quad b)\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}\ ;\quad c)\ y=3^{2-x}\quad d)\ y=2^{\frac{1}{x}}$

2. Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones logarítmicas:

   $a)\ y=\log(3x)\quad b)\ y=\log\sqrt{4-x^2}\quad c)\ y=\sqrt{\log|x|}\quad d)\ y=\log\left(\frac{x-3}{x+4}\right)$

3. Expresa en función de $\log 2$ y $\log 3$ los siguientes logaritmos decimales:

   a) $\log 6$ b) $\log 9$ c) $\log 2000$ d) $\log 1{,}5$ e) $\log\sqrt[4]{2}$ f) $\log 0{,}003$

Sol: a) $\log 2+\log 3$ b) $2\log 3$ c) $3+\log 2$ d) $\log 3-\log 2$ e) $\frac{1}{4}\log 2$ f) $\log 3-3$

4. Halla el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=10^x+\log x$ b) $g(x)=a^{\sqrt{x-1}}\ ,a>0$ c) $y=\frac{x}{\log x}$ d) $y=\sqrt{\log_3 x}$ e) $y=\log|x|$

Sol: a) $D(f)=\mathbb{R}^+$ b) $D(g)=\left(1,+\infty\right)$ c) $D(y)=\mathbb{R}^+$ d) $D(y)=\mathbb{R}^+$ e) $D(y)=\mathbb{R}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^x=32$ b) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=14$ c) $9^x-6\cdot 3^{x+1}+81=0$

   d) $5^x+5^{1-x}=6$ e) $3^{3x-2}=9^{x^2-2}$ f) $25^x-5^{x+1}+6=0$

Sol:

   a) $x=5$ b) $x=2$ c) $x=2$ d) $x=0\ ;\ x=1$

   e) $x=-\frac{1}{2}\ ;x=2$ f) $x=\log_5 2\ ;x=\log_5 3$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log x+\log 2=1+\log 3$ b) $\log x^2-\log 3=\log x+\log 5$

   c) $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$ d) $\log\sqrt{3x+1}+\log 5=1+\log\sqrt{2x-3}$

   e) $\log(22-x)=\log x-1$ f) $\log x+\log(3x+5)=2$

Sol: a) $x=15$ b) $x=15$ c) $x=3$ d) $x=\frac{13}{5}$ e) $x=20$ f) $x=\nexists$

7. Prueba con ejemplos que las siguientes expresiones son falsas:

   a) $a^{x+y}=a^x+a^y$ b) $a^{\frac{x}{y}}=\frac{a^x}{a^y}$ c) $a^{xy}=a^x\cdot a^y$

   d) $\log_a\left(x+y\right)=\log_a x+\log_b y$ e) $\log_a\left(xy\right)=\log_a x\cdot\log_b y$ f) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\log_a x}{\log_b y}$

8. Resuelve la ecuación exponencial $16^x-4^x=240$. Al sustituir 4^x por *y*, ¿son válidas las dos soluciones que se obtienen para *y*? ¿Por qué?

"Cuando llega el tiempo en que se podría, ha pasado el tiempo en que se pudo".
Marie von Ebner-Eschenbach (1830-1916); novelista austríaca.

Ejercicios de Complejos y Funciones

1. Dado el número complejo $z=\dfrac{1+3i}{2-i}$, calcula $\sqrt[4]{z+\overline{z}}$

   Sol: $z_k=\left(\dfrac{\sqrt[4]{250}}{5};\beta_k\right)$; $\beta_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$

2. Halla el valor de b para que el inverso del número complejo $z=\dfrac{2+bi}{4+3i}$ sea un número imaginario puro (su parte real es cero). *Sol*: $b=-\dfrac{8}{3}$

3. Calcula $\left(3-\sqrt{2}\,i\right)^3\cdot\overline{(-3+4i)}^2$. Expresa el resultado en forma trigonométrica.

4. *Sol*: $75\sqrt{11}(\cos 81+i\sin 81)$

5. Estudia el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos:

   $a)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x^2+4} & si\ x\le -2\\ \log(x+1) & si\ x>-2\end{cases}$; $b)\ g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-2x} & si\ x<1\\ \dfrac{3x+1}{2x^2-8} & si\ x>1\end{cases}$

   Sol: $a)\ D(f)=\mathbb{R}-[-2,-1]$; $D(f)=(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$; $b)\ D(g)=\mathbb{R}-(0,1]-\{2\}$

6. Indica si las siguientes funciones son inyectivas y en caso afirmativo halla sus funciones inversas $\left(f^{-1}(x),\ no\ 1/f\right)$: $a)\ f(x)=\log(3-x)$; $b)\ g(x)=\dfrac{5x-1}{2x+3}$

   Sol: $a)\ f^{-1}(x)=3-10^x$; $b)\ g^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{5-2x}$

7. Estudia y representa gráficamente las siguientes funciones:

   $a)\ f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$; $b)\ g(x)=\left|4-x^2\right|$; $c)\ h(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ x\le -1\\ \log(x-2) & si\ x>-1\end{cases}$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   $a)\ 16^x-4^x=240$; $b)\ 3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=189$; $c)\ 9^x-6\cdot 3^{x+1}+81=0$

   Sol: $a)\ x=2$; $b)\ x=4$; $c)\ x=2$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   $a)\ \log(3x+5)+\log x=2$; $b)\ \log(22-x)=-1+\log x$; $c)\ \log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$

   Sol: $a)\ x=5$; $b)\ x=20$; $c)\ x=3$

10. Halla el dominio o campo de definición de las siguientes funciones:

    $a)\ f(x)=\log(1+\sin x)$; $b)\ g(x)=5^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$; $c)\ h(x)=\log(e^x-1)$; $d)\ k(x)=\dfrac{x}{\ln x}+\ln(\sin x)$

11. Estudia y representa gráficamente las funciones

    $f(x)=\cos\left(\dfrac{x+\pi}{2}\right)$; $g(x)=3\sin(2x-\pi)$; $h(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones. Estudia también si presentan simetrías.

$$\text{a) } f(x)=3x^2+2 \quad \text{b) } g(x)=\sqrt{x-3} \quad \text{c) } h(x)=\frac{1}{x-1} \quad \text{d) } k(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Sol: a) $D(f)=\mathbb{R}$; Par b) $D(g)=\left[3,+\infty\right)$ c) $D(h)=\mathbb{R}-\{1\}$ d) $D(k)=\mathbb{R}$; Impar

2. Los parquímetros municipales de una ciudad presentan el cuadro de tarifas siguiente:

Primera media hora	0,5€
Por cada cuarto de hora o fracción siguiente hasta 2 horas	0,3€
Más de 2 horas (penalización)	10€

a) Escribe la función matemática asociada a este cuadro.
b) Calcula la imagen de 45 min.

Sol: a) $f(x)=\begin{cases} 0,5 & si\ 0<x\le 2 \\ 0,3\cdot\left(E\left[x\right]-2\right)+0,5 & si\ 2<x\le 8 \\ 10 & si\ \ x>8 \end{cases}$

donde *x* viene expresado en cuartos de hora.

b) Como 45 min. son tres cuartos de hora, tenemos que $x=3$ y $f(3)=0,8€$.

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x+2$, estudia si la función compuesta $(f\circ g)(x)$ presenta algún tipo de simetrías. *Sol*: Es par.

4. Calcula la función recíproca de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad \text{b) } g(x)=x^3-1 \quad \text{c) } h(x)=\frac{2}{x+3} \quad \text{d) } k(x)=\frac{x-1}{3-x}$$

Sol: a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-2x}{x+1}$ b) $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$ c) $h^{-1}(x)=\dfrac{2}{x+3}$ d) $k^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-4} & si\ x<0 \\ -\sqrt{x-2} & si\ x\ge 0 \end{cases} \qquad \text{b) } g(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & si\ x\le 3 \\ \dfrac{x^5-3}{x-7} & si\ x>3 \end{cases}$$

Sol: a) $D(f)=\left(\left(-\infty,0\right)-\{-2\}\right)\cup\left[2,+\infty\right)$ b) $D(g)=\left(-\infty,1\right]\cup\left(3,+\infty\right)-\{7\}$

6. Representa gráficamente la función $f(x)=\left|3x-2\right|$ e indica en qué punto alcanza su mínimo absoluto. ¿Está acotada superiormente? ¿Cuál es su recorrido?

Sol: mínimo = 2/3. No está acotada superiormente. $\Re(f)=\left[0\ ,\ +\infty\right)$

"Dejamos de temer aquello que se ha aprendido a entender".

Marie Curie (1867-1934); física francesa

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-7x^2+2}{x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-5x^2}{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+3x+1}{x^3-3x^2-2}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-2}\right)^{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{4}\cdot\dfrac{x-5}{x^2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-4x^3+8x^2-1}{3x^3+2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{3x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x^2+3}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$

l) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-6x\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{7x^2+6x^5}$

n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x}{6x+5}$

o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$

p) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)(x+3)}$

q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^2+3x}$

r) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^4-81}$

s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^5}{x^2-16}$

t) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2}$

u) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-2x^3-x+3}{4x^3+6x-1}$

v) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$

w) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)$

x) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x}{x+2}$

y) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

z) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12}$

aa) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

ab) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-1}{x-2}$

ac) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-4x}$

ad) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

ae) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4-3x^2+7x}{x^4+8x}$

af) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^2-4}$

ag) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

ah) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x}{x+2}$

ai) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$

aj) $\lim\limits_{x\to \infty}5^{\frac{x^2-2}{x+3}}$

ak) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-3}}$

al) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-3}{2x}\right)^{x+2}$

am) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$

an) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$

ao) $\lim\limits_{x\to \infty}(3-x)^{2-x}$

ap) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-5x+6}\right)$

aq) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)^{1-x}$

ar) $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{\frac{x-1}{x-3}}$

as) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

at) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}\right)$

au) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x-4}$

av) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{3x-5}{x^2-4x}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

Soluciones:

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 0 d) 0 e) e^{11} f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{-4}{3}$ h) $\frac{-1}{3}$ i) $\frac{1}{7}$ j) $\frac{-1}{2}$ k) 0 l) -8

m) $\frac{6}{13}$ n) $\frac{21}{23}$ o) $\frac{5}{7}$ p) 0 q) $\frac{-1}{3}$ r) $\frac{1}{4}$ s) 0 t) 2 u) $\frac{-1}{2}$ v) 3 w) 0 x) $+\infty$

y) ∞ z) $\frac{3}{5}$ aa) -1 ab) $\frac{4}{3}$ ac) $\frac{1}{8}$ ad) 0 ae) 1 af) $\frac{-5}{2}$ ag) 0 ah) $+\infty$ ai) -1 aj) $+\infty$

ak) 1 al) 0 am) $e^{-1/20}$ an) 1 ao) 0 ap) $\nexists$ aq) 1 ar) e^2 as) $\frac{1}{4}$ at) 1 au) e^3 av) $\nexists$

Ejercicios de continuidad de funciones

1: Estudia la continuidad de las siguientes funciones, en el punto de abscisa $x = a$ que se indica en cada caso:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x & si \quad x < 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \\ 2x - 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$ ($x = 2$)

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & si \quad x < -2 \\ x^2 - 5 & si \quad x \geq -2 \end{cases}$ ($x = -2$)

c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & si \quad x \leq 1 \\ 3x + 4 & si \quad x < 1 \end{cases}$ ($x = 1$)

d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ \dfrac{1}{3} & si \quad x = 3 \end{cases}$ ($x = 3$)

e) $j(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 2 \\ 3x - 2 & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & si \quad 3 < x \end{cases}$ ($x = 2$, $x = 3$)

f) $k(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & si \quad x < 1 \\ 2x^2 - 1 & si \quad 1 \leq x < 3 \\ \dfrac{x+3}{x} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$ ($x = 1$, $x = 3$)

(<u>Solución</u>: Son continuas las funciones de los ejercicios b) ; e) ; f) en $x_0 = 1$)

2: Estudia los intervalos de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}$ c) $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 5}}$

d) $y = e^{\sqrt{x+1}}$ e) $y = \log\left(x^2 - 3x\right)$ f) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^4 + 2x^2}{x^2} & si \quad x \neq 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}$

(<u>Solución</u>: a) $\Re - \{0,2\}$; b) $[0,+\infty)$; c) $\Re - \{-5\}$; d) $[-1,+\infty)$; e) $(-\infty,-3) \cup (0,+\infty)$; f) $\Re$)

3: Encuentra el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua en el punto de abscisa, $x = a$, que se indica en cada caso:

a) $f(x) = \begin{cases} k^2 x & si \quad x < 1 \\ 3kx - 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ (En $x = 1$)

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} & si \quad x \neq -2 \\ k & si \quad x = -2 \end{cases}$ (En $x = -2$)

(<u>Solución</u>: a) $k = 2$, $k = 1$; b) $k = 2$)

"Una palabra bien elegida puede economizar no sólo cien palabras sino cien pensamientos".

Henri Poincaré (1854-1912); matemático francés.

Derivadas

A:

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3 \quad \rightarrow \quad y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$
2. $y = ax^2 + bx + c \quad \rightarrow \quad y' = 2ax + b$
3. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}} \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{2a}{x\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}$
4. $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{-2x^2 - 6x + 25}{\left(x^2 - 5x + 5\right)^2}$
5. $y = \dfrac{\pi}{x} + Lx \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{\pi}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
6. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

B:

1. $y = x^7 e^x \quad \rightarrow \quad y' = x^6 e^x (7 + x)$
2. $y = (x-1)e^x \quad \rightarrow \quad y' = xe^x$
3. $y = \dfrac{x^2}{Lx} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{x\left(Lx^2 - 1\right)}{\left(Lx\right)^2}$
4. $y = \dfrac{1}{x} + 2Lx - \dfrac{Lx}{x} \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1-Lx}{x^2}$
5. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x \quad \rightarrow \quad y' = x^2 e^x$
6. $y = x^3 Lx - \dfrac{x^3}{3} \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 Lx$

C:

1. $y = 5\sin x + 3\cos x \quad \rightarrow \quad y' = 5\cos x - 3\sin x$
2. $y = \tan x - \cot x \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$
3. $y = \arctan x \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. $y = \sin(3x) - \cos(3x^2) \quad \rightarrow \quad y' = 3\left[\cos(3x) + 2x\sin(3x^2)\right]$

Derivadas (II)

D:

1. $y = \left(1+3x-5x^2\right)^7 \quad \rightarrow \quad y' = 7\left(1+3x-5x^2\right)^6 (3-10x)$

2. $y = \sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y = (3-2\sin x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = -6\cos x(3-2\sin x)^2$

4. $y = \sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan \pi} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$

5. $y = 5e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad y' = -10xe^{-x^2}$

6. $y = \sin 3x + \cos\dfrac{x}{5} + \tan x \quad \rightarrow \quad y' = 3\cos x - \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

7. $y = \cot\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}$

8. $y = \arctan 2x \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2}{1+4x^2}$

9. $y = x^2 10^{2x} \quad \rightarrow \quad y' = 2x10^{2x}(1+xL10)$

10. $y = \dfrac{1}{5^{x^2}} \quad \rightarrow \quad y' = -2x5^{-x^2} L5$

11. $y = \sqrt{Lx+1} + L\left(\sqrt{x}+1\right) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{Lx+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

12. $y = e^{\sin^2 x} \quad \rightarrow \quad y' = 2\sin x\cos x e^{\sin^2 x} = \left(\sin(2x)e^{\sin^2 x}\right)$

13. $y = L\cos\left(\dfrac{x-1}{x}\right) \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{x^2}\tan\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

14. $y = (x+1)(2x-3)^4 \quad \rightarrow \quad y' = 5\cdot(2x+1)(2x-3)^3$

15. $y = \left(\dfrac{2-3x}{1+x^2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3\left(\dfrac{2-3x}{1+x^2}\right)^2 \dfrac{3x^2-4x-3}{\left(1+x^2\right)^2}$

16. $y = \dfrac{1-x}{(2+3x)^2} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3x-8}{(2+3x)^3}$

1. Halla la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 3x^5 - 6x^4 + 2x^2 - 7x^{-3} + 4x^{-5} + 2 \quad \rightarrow \quad y' = 15x^4 - 24x^3 + 4x + 21x^{-4} - 20x^{-6}$

2. $y = \left(x^2 + 3\right)^{-4} \quad \rightarrow \quad y' = -8x\left(x^2 + 3\right)^{-5}$

3. $y = \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{4x-3} - 6 \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{4}{x^5} + \dfrac{6}{x^3} - \dfrac{8}{4x-3}$

4. $y = \dfrac{5}{\left(2x^3 + 7\right)^4} \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{120x^2}{\left(2x^3 + 7\right)^5}$

5. $y = \left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^6 \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{60\left(x-4\right)^5}{\left(x+6\right)^7}$

6. $y = \left(\dfrac{x^2-2}{x^2+6}\right)^8 \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{128x\left(x^2-2\right)^7}{\left(x^2+6\right)^9}$

7. $y = \dfrac{3x-4}{\left(5x+7\right)^3} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3\left(27-10x\right)}{\left(5x-7\right)^4}$

8. $y = 5^x + 6 \cdot 3^{-x} - 2 \cdot e^{2x} \quad \rightarrow \quad y' = 5^x L5 - 6 \cdot 3^{-x} L3 - 4 \cdot e^{2x}$

9. $y = 3^{x^2} - 7x + 5 \quad \rightarrow \quad y' = 2x \cdot 3^{x^2} L3 - 7$

10. $y = \left(3x+2\right)e^{5x-3} \quad \rightarrow \quad y' = e^{5x-3}\left(15x+13\right)$

11. $y = \log_5\left(x^3 + 4x^2 - 3\right) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3x^2 + 8x}{x^3 + 4x^2 - 3}\log_5 e$

12. $y = \log(x \cdot 10^{2x}) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x}\log e + 2$

13. $y = L(2x^3 - 5x + 6) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{6x^2 - 5}{2x^3 - 5x + 6}$

14. $y = \dfrac{Lx}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1 - Lx}{x^2}$

15. $y = \sin^2 x + 3x \sin x \quad \rightarrow \quad y' = \sin(2x) + 3(x \cos x + \sin x)$

16. $y = e^{2x}\cos(3x-1) \quad \rightarrow \quad y' = e^{2x}\left[2\cos\left(3x-1\right) - 3\sin\left(3x-1\right)\right]$

17. $y = \sin^2\left[L\left(3x^2+5\right)\right] \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{6x \cdot \sin\left[2L\left(3x^2+5\right)\right]}{3x^2+5}$

18. $y = \cos\left(e^x + \sqrt{x} - 3^x\right) \quad \rightarrow \quad y' = -\sin\left(e^x + \sqrt{x} - 3^x\right) \cdot \left(e^x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3^x L3\right)$

19. $y = \tan(x^4 + 3) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{4x^3}{\cos^2\left(x^4+3\right)}$

20. $y = x^2 + \tan(x^3 - 1) + L\left(\cos x\right) \quad \rightarrow \quad y' = 2x + \dfrac{3x^2}{\cos^2\left(x^3-1\right)} - \tan x$

21. $y = \dfrac{1}{\sin\left(\sqrt{x}\right)} \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{\cot\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right)}$

Derivadas

1. Calcula la función derivada correspondiente a cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = L4 + \sqrt{7}$ c) $f(x) = 2(1+x)^{-5}$

d) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ e) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ f) $f(x) = \left(x^2+3x\right)\cdot\left(1-2x\right)$

g) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x} - 5x^2\right)^2$ h) $f(x) = \left(x^{-2}+x-1\right)^4$ i) $y = 3^{x^2+x-1}$

j) $f(x) = e^{x^{-2}+3x}$ k) $f(x) = L\frac{6x^2+1}{2x^2-x+1}$ l) $f(x) = \log_3\left(\frac{1}{x-2}\right)$

m) $f(x) = \sin(1+x^2)$ n) $f(x) = \tan\frac{1-x}{1+x}$ p) $f(x) = L(Lx)$

q) $f(x) = \left(\dfrac{2-3x}{1+x}\right)^4$ r) $f(x) = \cos^4(3x-2)$ s) $f(x) = x^3\ln(4x-3)$

Sol:

a) $f' = 2x$ b) $f' = 0$ c) $f' = \dfrac{-10}{\left(1+x\right)^6}$

d) $f' = \dfrac{2}{(1-x)^2}$ e) $f' = \dfrac{1-x^2}{2\sqrt{x(1+x^2)^3}}$ f) $f' = -6x^2-10x+3$

g) $f' = \dfrac{2(5x\sqrt[3]{x^2}-1)(30x\sqrt[3]{x^2}-1)}{3\sqrt[3]{x}}$ h) $f' = \dfrac{4(x^3-2)(x^3-x^2+1)^3}{x^9}$ i) $f' = 3^{x^2+x-1}(2x+1)\cdot\ln 3$

j) $f' = \dfrac{e^{x^{-2}+3x}(3x^3-2)}{x^3}$ k) $f' = -\dfrac{6x^2-8x-1}{(2x^2-x+1)(6x^2+1)}$ l) $f' = \dfrac{1}{(2-x)\ln 3}$

m) $f' = 2x\cos(x^2+1)$ n) $f' = \dfrac{-2}{\left(x+1\right)^2\cdot\cos^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$ p) $f' = \dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

q) $f' = \dfrac{20(3x-2)^3}{\left(1+x\right)^5}$ r) $f' = -12\cos^3(3x-2)\sin(3x-2)$ s) $f' = 3x^2\ln(4x-3) + \dfrac{4x^3}{4x-3}$

2. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \dfrac{3}{4} + x^2, a = \dfrac{1}{2}$ b) $y = 5+3x^2, a = 0$ c) $y = 2\sqrt{x}, a = 4$

d) $y = 2+\cos(3x), a = 0$ e) $y = \dfrac{3x}{1-x}, a = 0$ f) $y = x^2+2x, a = 1$

Sol:

a) $y = x + \dfrac{1}{2}$ b) $y = 5$ c) $y = \dfrac{1}{4}x + 3$

d) $y = 3$ e) $y = 3x$ f) $y = 4x - 1$

Derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

01. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{1-2x}{2e^x\sqrt{x}}$

02. $y=\sin\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{3x+2}}\right)$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{\left(3x^2+4x\right)\cos\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{3x+2}}\right)}{3(3x+2)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{3x+2}\right)^2}}$

03. $y=\sqrt[3]{\sin\left(\frac{x^2}{3x+2}\right)}$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{(3x^2+4x)\cos\left(\frac{x^2}{3x+2}\right)}{3\left(3x+2\right)^2\sqrt[3]{\sin^2\left(\frac{x^2}{3x+2}\right)}}$

04. $y=\cos^3\left[L\left(3x^2+5x\right)\right]$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{-18x-15}{3x^2+5x}\cos^2\left[L\left(3x^2+5x\right)\right]\cdot\sin\left[L\left(3x^2+5x\right)\right]$

05. $y=L\left[\cos^3\left(3x^2+5x\right)\right]$ $\rightarrow$ $y'=-3\left(6x+5\right)\tan\left(3x^2+5x\right)$

06. $y=\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^2}$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{4\cos x}{3\left(1-\sin x\right)^2\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}$

07. $y=5^{\tan\left(\sqrt{x^2+4x}\right)}$ $\rightarrow$ $y'=L5\cdot 5^{\mathrm{tang}\left(\sqrt{x^2+4x}\right)}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}\cdot\cos^2\left(\sqrt{x^2+4x}\right)}$

08. $y=\log\left[\sqrt[3]{\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^2}\right]$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{-4\sin x}{3\left(1-\cos^2 x\right)}\log e=\dfrac{-4}{3\sin x}\log e$

09. $y=\cot^2\left(3x^3-6x\right)$ $\rightarrow$ $y'=-2\cot\left(3x^3-6x\right)\dfrac{9x^2-6}{\sin^2(3x^3-6x)}$

10. $y=\left(\dfrac{3x^2+1}{4x}\right)^{\cos\left(3x^4\right)}$ $\rightarrow$ $y'=\left[-12x^3\sin\left(3x^4\right)L\left(\dfrac{3x^2+1}{4x}\right)+\cos\left(3x^4\right)\dfrac{3x^2-1}{3x^3+x}\right]$

11. $y=\arctan\left(\sqrt{\frac{2x}{3-x}}\right)$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{3}{\left(9-x^2\right)\sqrt{\frac{2x}{3-x}}}$

12. $y=\dfrac{\tan\left(e^{x^2+1}\right)}{\sqrt{\cos\left(2x+1\right)}}$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{2xe^{x^2+1}\cos(2x+1)+\tan\left(e^{x^2+1}\right)\sin(2x+1)\cos^2\left(e^{x^2+1}\right)}{\cos^2\left(e^{x^2+1}\right)\cos(2x+1)\sqrt{\cos(2x+1)}}$

13. $y=e^{\arctan\left[\pi^{\frac{1}{x}}\right]}$ $\rightarrow$ $y'=-e^{\arctan\left[\pi^{\frac{1}{x}}\right]}\cdot\dfrac{L\pi\cdot\pi^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+\pi^{\frac{2}{x}}\right)}$

14. $y=e^{\frac{x}{x^2+4}}$ $\rightarrow$ $y'=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}e^{\frac{x}{x^2+4}}$

15. $y=\left(x^3-2x\right)^{\left(3x^2+5\right)}$ $\rightarrow$ $y'=\left(6xL\left(x^3-2x\right)+\dfrac{9x^4+9x^2-10}{x^3-2x}\right)\cdot\left(x^3-2x\right)^{\left(3x^2+5\right)}$

16. $y=\left(2x^4-3\right)^{(3x-1)}$ $\rightarrow$ $y'=\left(2x^4-3\right)^{(3x-1)}\left[3L(2x^4-3)+\dfrac{8x^3(3x-1)}{2x^4-3}\right]$

Derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

17. $y = \arcsin\left(\sqrt{x^2-4x+1}\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{-x^4+8x^3-17x^2+4x}}$

18. $y = \sqrt{\arcsin\left(x^2-4x+1\right)} \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{x-2}{\sqrt{1-\left(x^2-4x+1\right)^2}\sqrt{\arcsin\left(x^2-4x+1\right)}}$

19. $y = \arccos\left[\log_3\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)\right] \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{-\log_3 e\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-x\right)\sqrt{1-\log_3^2\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)}}$

20. $y = \left[\cos(\pi x)\right]^{\arctan\left(x^3+\pi\right)} \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \left[\dfrac{3x^2\log\left[\cos(\pi x)\right]}{1+\left(x^3+\pi\right)^2} - \pi\arctan\left(x^2+\pi\right)\tan(\pi x)\right]\cdot y$

21. $y = e^{\arccos\left[\pi^{\frac{1}{x}}\right]} \xrightarrow{\text{Solución}} y' = e^{\arccos\left[\pi^{\frac{1}{x}}\right]}\cdot\dfrac{L\pi\cdot\pi^{\frac{1}{x}}}{x^2\sqrt{1-\pi^{\frac{2}{x}}}}$

22. $y = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{2x}{3-x}}\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{3}{\left(9-x^2\right)\sqrt{\dfrac{2x}{3-x}}}$

23. $y = \operatorname{arccot}^3\left(\sqrt{2x}\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{-3\arctan^2\left(\sqrt{2x}\right)}{(1+2x)\sqrt{2x}}$

24. $y = \dfrac{\operatorname{arccot}\left(\pi x^2\right)}{\arctan(\pi x)} \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{\dfrac{-2\pi x}{1+\pi^2x^4}\arctan(\pi x) - \arctan\left(\pi x^2\right)\dfrac{\pi}{1+\pi^2x^2}}{\arctan^2(\pi x)}$

25. $y = \arcsin\left(\sqrt[3]{\left(3x^2-1\right)^4}\right) \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{8x}{\left(3x^2-1\right)\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\left(3x^2-1\right)^8}-1}}$

26. $y = \sqrt[3]{\arcsin^4\left(3x^2-1\right)} \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{8\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\arcsin\left(3x^2-1\right)}}{3\cdot\sqrt{2-3x^2}}$

27. $y = \arccos\left[L\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right] \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{4x}{\left(x^4-1\right)\sqrt{1-L^2\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)}}$

28. $y = L\left[\arccos\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right] \xrightarrow{\text{Solución}} y' = \dfrac{4x}{\arccos\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)\cdot\sqrt{\left(x^2-1\right)^4-\left(x^4-1\right)^2}}$

"Las matemáticas no solo son reales, sino que son la única realidad"

Martin Gardner (1914), matemático lúdico estadounidense

Ejercicios de continuidad, límites y derivadas

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1} & \text{si } x<2\\ ax+3 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$.

   Determina el valor de *a* para que $f(x)$ sea continua en $x=2$. *Sol*: $a=-\dfrac{5}{6}$

2. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}1-2x & si\ x\leq -2\\ \dfrac{x-2}{x+2} & si\ -2<x<4\\ \dfrac{1}{3} & si\ x>4\end{cases}$ en los puntos $x=-2\ y\ x=4$. Indica, en los casos de discontinuidad, qué tipo de discontinuidad presenta.

   Sol: No es continua en ninguno de los dos puntos. En $x=-2$ discontinuidad inevitable de salto infinito y en $x=4$ discontinuidad evitable.

3. Calcula los siguientes límites, especificando el tipo de indeterminación:

   a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+x^2-x-1}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-x\right)$

   Sol: $a)\ \dfrac{0}{0}\ ;\ -1\quad b)\ \infty-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}$

4. Estudia si las siguientes funciones presentan asíntotas verticales y/u horizontales. En caso afirmativo indica cuáles son:

   $a)\ f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3-1}\ ;\quad b)\ g(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2+3}\ ;\quad c)\ h(x)=\dfrac{x^4+3}{(x+5)^2}\quad d)\ k(x)=\dfrac{2x^3+3}{x^2+1}$

   Sol: $a)\ AV\ \ y=1;\ AH\ \ x=0\ ;\quad b)\ AH\ \ x=1\ ;\quad c)\ AV\ \ y=-5\ ;\quad d)$ *No presenta.*

5. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $y=\left(\dfrac{x-2}{2x+3}\right)^4$

   b) $y=\sqrt{\pi}+x^2\cdot e^{4-3x}$

   Sol: $a)\ \dfrac{28\cdot(x-2)^3}{(2x+3)^5}\ ;\quad b)\ x\cdot e^{4-3x}\cdot(2-3x)$

6. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=L(2x-1)$ en el punto de abscisa $x=1$. *Sol*: $y=2x-2$

"La alegría de ver y entender es el más perfecto don de la naturaleza".

Albert Einstein (1879-1955); físico y matemático.

Problemas de optimización

1. Halla las dimensiones del jardín rectangular de mayor superficie que se puede inscribir en un terreno circular de 100 metros de radio. *Sol*: Cuadrado $l = \sqrt{2}\ hm$.
2. Demuestra que $\forall x > 1$ se verifica la desigualdad: $Lx > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$
3. En un terreno llano se desea acotar una parcela rectangular usando 80 m de tela metálica para vallarla, pero dejando en uno de sus lados una abertura de 20 m sin vallar. Halla las dimensiones de la parcela de área máxima que puede acotarse de esa manera y el valor de dicha área. *Sol*: Es un cuadrado de 25 m de lado.
4. Se toma una cuerda de 5 metros de longitud y se unen los extremos. Entonces podemos construir con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcular, de manera razonada, las dimensiones del que tiene mayor superficie y decir qué tipo de triángulo resulta. *Sol*: Equilátero, lado $\dfrac{5}{3}m$.
5. Un bote de forma cilíndrica tiene una capacidad de 1/3 de litro. Estudiar las dimensiones óptimas para que el coste del material empleado en su construcción sea mínimo.

   Solución: $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6\pi}}$; $h = 2r$
6. Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo. *Solución*: $x = 15$; $y = 10$
7. Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie para hacer un aprisco. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste fuera mínimo? *Sol*: $x = y = 60$
8. Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima. Razonar la respuesta. *Sol*: $x = 1/2$.
9. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal del tramo horizontal cuesta 12 € y el tramo vertical 18 €. Calcular:
   a) Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
   b) El coste del marco.

   Sol: a) $x = 3$; $y = 2$; b) $6 \cdot 12 + 4 \cdot 18 = 144$€
10. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. *Sol*: 5 cm y 10 cm.
11. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

    Sol: $x = 5$; $y = 4$

12. Se tiene un alambre de longitud L y se desea dividirlo en dos trozos para formar con cada uno de ellos un triángulo equilátero. Hallar la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas de los dos triángulos sea mínima.*Sol*: $x=\dfrac{L}{2}$; $A_t=\dfrac{\sqrt{3}\cdot L^2}{72}$

13. De una lámina cuadrada de cartón de lado L se debe cortar de cada esquina un cuadrado, de modo que con el cartón resultante, doblando convenientemente, se pueda construir una caja sin tapa. Determinar la longitud del lado del cuadrado de las esquinas para que la capacidad de la caja sea máxima. *Sol*: $x=\dfrac{L}{6}$; $V=\dfrac{2L^3}{27}$

14. Una ventana está formada por un rectángulo rematado con un semicírculo en la parte superior. Si el marco ha de tener una longitud p, determinar sus dimensiones para que la superficie de la ventana sea máxima. *Sol*: $D=\dfrac{2p}{4+\pi}$; $x=\dfrac{p}{4+\pi}$

15. Determina las dimensiones de un rectángulo inscrito en un semicírculo de radio r para que su superficie sea máxima: *Sol*: Base: r ; altura: $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

16. Determina las dimensiones de un trapecio inscrito en un semicírculo de radio r para que su superficie sea máxima. *Sol*: Base mayor: $2\cdot r$; base menor: r ; altura: $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

17. Halla las dimensiones de un cono inscrito en una esfera, cuyo volumen sea máximo.
Sol: base: $x=\dfrac{2\sqrt{2}r}{3}$; altura: $y=\dfrac{4}{3}r$

18. Halla el rectángulo de superficie máxima que se puede inscribir en un triángulo isósceles de 8 cm de base y 25 cm de altura.*Sol*: $x=4$; $y=\dfrac{25}{2}$

19. Encuentra entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ la que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima.
Sol: $2x+y=4$

20. Escribe el número 4 como suma de dos enteros tales que la suma del cuadrado de uno y el cubo del otro sea máxima. *Sol*: $x=6$, $y=-2$

21. Calcula un punto situado en el eje de abscisas tal que la suma de los cuadrados de las distancias de dicho punto a los puntos $(2,0)$ y $(0,3)$ sea mínima. *Sol*: $(1,0)$

22. Halla el cilindro de máximo volumen que se puede inscribir en un cono de 10 cm de radio y 20 cm de altura. *Sol*: $x=y=\dfrac{20}{3}$

23. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?