Números Reales

1. Indica cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos. Justifica tu respuesta:
   a) Todo número real es irracional.
   b) Todo número entero es racional.
   c) El número p es un número real.
   d) La suma de dos números irracionales siempre es un número irracional.
   e) La suma de dos números racionales siempre es un número racional.
   f) La sustracción de números reales es sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.
2. El 75% de la programación de una cadena de radio se dedica a la música, de las cuales, las 2/7 partes son de música clásica. Si la cadena emite sólo durante 10 horas al día, ¿cuántas horas se dedican, respecto al total, a la música clásica? *Sol*: Aprox 2h 8'.
3. Realiza las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{5}+0,\widehat{3}-\left(\frac{10}{12}-\frac{3}{4}\right)\cdot(-5)= \qquad 1,2-0,1\widehat{4}\cdot\left(\frac{3}{2}-2\right)=$$

Sol: $\frac{23}{20}$; $\frac{229}{180}$

4. Escribe en forma de intervalo los siguientes conjuntos de números reales:

$$A=\{x\in\mathbb{R},\ -3\le x<2\}\ ;\ B=\left\{x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{3}<x\le 5\right\}\ ;\ C=\{x\in\mathbb{R},\ x<1\}\ ;\ D=\{x\in\mathbb{R},\ -2\le x\le 0\}$$

Sol: $[-3\,;\,2)$; $\left(\frac{1}{3}\,;\,5\right]$; $(-\infty\,;\,1)$; $[-2\,;\,0]$

5. Teniendo en cuenta los intervalos anteriores calcular:

$$A\cup B\ ;\ A\cap C\ ;\ C-D\ ;\ A\cap B$$

Sol: $[-3\,;\,5]$; $[-3\,;\,1)$; $(-\infty\,;\,-2)\cup(0\,;\,1)$; $\left(\frac{1}{3}\,;\,2\right)$

6. Escribe el entorno reducido correspondiente a los intervalos $A\cup B$; $A\cap C$ y $A\cap B$ del ejercicio anterior.
7. Escribe en forma de entorno y de intervalo el conjunto de números reales que disten de 6 en menos de tres unidades. Escribe también su entorno reducido. Represéntalos gráficamente.
8. ¿En qué se diferencian las aproximaciones de un número por redondeo y por truncamiento?
9. Escribe las aproximaciones decimales por defecto por exceso y de truncamiento hasta el orden de las milésimas de los siguientes números: $\sqrt{5}$; $\frac{3}{7}$; 3,14159265 ; $2\sqrt{2}$
10. Completa la siguiente tabla:

Valor exacto	Aproximación	Error absoluto	Error relativo
2,1517289	2,15		
-3,181728	-3,182		
4,325692	4,325		

¿Qué tipo de aproximación se ha realizado (redondeo o truncamiento)?

Radicales

1. ¿Es cierto que el producto de dos números irracionales ES SIEMPRE un número irracional? En caso negativo pon un contraejemplo.
2. Representa gráficamente y escribe en forma de entorno el conjunto de números reales que disten de –1 menos de dos unidades. *Sol*: $E_2\left(-1\right)$.
3. Escribe en forma de intervalo los siguientes conjuntos de números reales y calcula $A\cup B,\ A\cup C,\ A\cap B$ y $A\cap B\cap C$:

   $A=\left\{x\in\mathbb{R},\ \left|x\right|<3\right\}$; $B=\left\{x\in\mathbb{R},\ -2\leq x<\dfrac{7}{2}\right\}$; $C=\left\{x\in\mathbb{R},\ -1\leq x\right\}$.

Sol: $\left(-3;\dfrac{7}{2}\right)$; $\left(-3;+\infty\right)$; $\left[-2;3\right)$; $\left[-1;3\right)$

4. Escribe la aproximación hasta las milésimas del número π, por redondeo y por truncamiento. *Sol*: Redondeo: 3,142 ; Truncamiento: 3,141
5. Simplifica los siguientes radicales: $\sqrt[8]{625}$; $\sqrt[12]{729}$; $\sqrt[6]{1024}$

Sol: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt[3]{4}$

6. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[6]{16}= \ ; \quad 3\cdot\sqrt{32}-5\cdot\sqrt{98}+\sqrt{18}= \ ; \quad 6\sqrt[3]{375}-\left(5\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}\right)$$

Sol: $\sqrt[12]{5^3 7^4 2^8}$; $-20\sqrt{2}$; $17\sqrt[3]{3}$

7. Racionaliza las siguientes expresiones:

$$\frac{3}{5\cdot\sqrt[4]{3}} \ ; \quad \frac{7}{\sqrt{10}-2\sqrt{3}} \ ; \quad \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \ ; \quad \frac{6}{\sqrt{8}}$$

Sol: $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{5}$; $-\dfrac{7\left(\sqrt{10}+2\sqrt{3}\right)}{2}$; $3+\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}$; $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

8. Extrae todos los factores que sean posible fuera de los siguientes radicales:

$$\sqrt{512} \ ; \quad \sqrt[3]{216} \ ; \quad \sqrt[3]{6000} \ ; \quad \sqrt[4]{405} \ ; \quad \sqrt[5]{1024}$$

Sol: $16\sqrt{2}$; 6 ; $10\sqrt[3]{6}$; $3\sqrt[4]{5}$; 4

9. Halla el valor de la siguiente suma::

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{7}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

Sol: $\dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

10. Resuelve las siguientes operaciones expresadas en notación científica:

$$3,254\ 10^{-21}+\ 5,747\ 10^{-18} \ ; \quad 2,25\ 10^{15}\cdot 4,5\ 10^{7} \ ; \quad \frac{8,14\ 10^{-9}\cdot\left(-2,14\ 10^{12}\right)}{1,28\ 10^{-6}+2,357\ 10^{-4}}$$

Sol: $5,750\cdot 10^{-18}$; $1,0125\cdot 10^{23}$; $-7,351\cdot 10^{7}$

11. Escribe en forma de potencia las siguientes expresiones:

$$\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\sqrt{2}}} \ ; \quad \sqrt{\sqrt[3]{7\sqrt[5]{49}}} \ ; \quad \sqrt{8\sqrt[3]{2\sqrt[6]{16}}}$$

Sol: $\sqrt[24]{3^8 2^5}=3^{1/3}\cdot 2^{5/24}$; $\sqrt[30]{7^7}=7^{7/30}$; $2\sqrt[9]{2^7}=2^{16/9}$

Radicales (2)

1. Contesta brevemente las siguientes cuestiones:
   - ¿A qué equivale la raíz cuadrada de la raíz cúbica de un número?
   - ¿Se puede extraer siempre la raíz cuadrada de la raíz cúbica de un número? ¿Por qué?
   - Si dividimos el exponente de una potencia por 2, ¿qué operación hemos realizado? ¿y si lo dividimos por el número natural n>0?
   - ¿Qué se entiende por expresiones radicales conjugadas?
2. Responde si es verdadera o falsa, cada una de las siguientes expresiones:
   - $\sqrt{a^2+b^2+2ab}=a+b+\sqrt{2ab}$
   - $\sqrt{a^2+b^2+2ab}=a+b$
   - $\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}=x-y$
   - Racionalizar es transformar un número irracional en un número racional.
3. Transforma en potencias de 7 la expresión $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}$ *Sol*: $\sqrt[8]{7^7}$
4. ¿Puede ser una potencia de 2 menor que 2? En caso afirmativo indica qué valor ha de tener el exponente.
5. Extrae fuera del radical todos los factores posibles:

$$\text{a) } \sqrt[4]{15552} \quad \text{b) } \sqrt[3]{16a^7b^5} \quad \text{c) } \sqrt{50a^3b^6} \quad \text{d) } \sqrt[3]{\tfrac{3888}{81}}$$

Sol: a) $6\cdot\sqrt[4]{12}$ b) $2a^2b\sqrt[3]{2ab^2}$ c) $5ab^3\sqrt{2a}$ d) $2\cdot\sqrt[3]{6}$

6. Racionaliza:

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \quad \text{d) } \frac{xy}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} \quad \text{e) } \frac{3}{1+x+\sqrt{2}}$$

Sol:

$$\text{a) } \sqrt[3]{2} \quad \text{b) } -2\cdot\sqrt{6}-5 \quad \text{c) } \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{ab} \quad \text{d) } \frac{xy\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x-y} \quad \text{e) } \frac{3\left((1+x)^2-\sqrt{2}\right)}{x^2+2x-1}$$

7. Calcula y da el resultado usando potencias de exponente racional:

$$\text{a) } \sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{4}}} \quad \text{b) } \sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[5]{200} \quad \text{c) } \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{-3}}}}$$

Sol: a) $2^{-1/4}$ b) $2^{19/15}\cdot5^{11/15}$ c) $2^{11/24}$

8. Realiza las siguientes operaciones, simplificando siempre que sea posible.

$$\text{a) } 6\cdot\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad \text{b) } \sqrt{60}-\sqrt{54}+\sqrt{96} \quad \text{c) } \sqrt{48}-\sqrt{12}+2\cdot\sqrt{27} \quad \text{d) } \left(3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Sol: a) $\frac{19\sqrt{2}}{4}$ b) $2\cdot\sqrt{15}+\sqrt{6}$ c) $8\cdot\sqrt{3}$ d) $3-\sqrt{3}$

9. Usando notación científica, calcula: $\sqrt{0{,}000002}\cdot\frac{0{,}00003}{\sqrt[3]{3000000}}$

Sol: $\sqrt[6]{648}\cdot10^{-10}\cong 2{,}942\cdot10^{-10}$

LOGARITMOS

1. Utiliza el concepto de logaritmo para calcular el valor de las siguientes expresiones:

   a) $\log_{25}\left(\frac{1}{625}\right)$ b) $\log_{0,01}(1000)$

   c) $\log_{1/49}(7)$ d) $\log(0{,}00001)$

   e) $\log_{\sqrt{3}}(27))$ f) $Ln\left(\sqrt[5]{e^2}\right)$

2. Efectúa las siguientes operaciones:

   a) $\log_5(125) - \log_3(81^2) + \log_7(49^3) =$

   b) $\log(0{,}001) + Ln(e^2) + \log(1000) - Ln(\sqrt{e}) =$

   c) $\log_2(\log_2\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right) =$

3. Halla la relación que existe entre a y b sabiendo que se verifican las siguientes igualdades:

   a) $\log a - \log b = 0$ b) $\log a = \log b + \log 2$

   c) $\log a = 2\log b$ d) $\log a + \log b = 0$

4. Relaciona mediante flechas aquellas expresiones que tienen el mismo valor:

   a) $\log\sqrt{ab}$ b) $\log a - \log 2 + \log b - \log 2$

   c) $\log\left(\frac{ab}{4}\right)$ d) $\frac{1}{2}(\log a + \log b)$

5. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301030$ y $\log 3 = 0{,}477121$, calcula:

   a) $\log 5$ b) $\log 24$ c) $\log 18$ d) $\log\left(\frac{8}{3}\right)$

   Solución: a) 0,69897 b) 1,380211 c) 1,255272 d) 0,425969

6. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $\log_3(27^3 9^x)$ b) $\log_2\left(\frac{8^2}{4^{-3x}}\right)$ *Solución*: a) $9+2x$ b) $6(1+x)$

7. Si a y b son dos números naturales, calcula: $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) + \log_{1/b}(b)$ *Solución*: -2

8. Halla la base de los siguientes logaritmos:

   a) $\log_a 625 = 4$ b) $\log_a 0{,}001 = 3$ c) $\log_a 0{,}01 = -2$

   Solución: a) 5 b) $\frac{1}{1000}$ c) 10

9. Si $\log_2 a = x$, expresa en función de x los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2\left(\frac{a}{128}\right)$ b) $\log_2\left(\frac{a}{32}\right)$ c) $\log_2\sqrt[3]{a}$

   Solución: a) $x-7$ b) $x-5$ c) $\frac{x}{3}$

10. Resuelve la siguiente ecuación logarítmica:

    $\log x = 1 + \log(33 - x)$ *Solución*: $x = 30$

Ejercicios de Exponenciales y Logaritmos

1. Representa la siguiente función $f(x)=|2x-4|$ en el intervalo [–1; 5].
2. En un banco nos cambiaron 800$ por 835€ y por 1200$ nos dieron 1255€. ¿cuántos euros nos darán por 1000€? *Sol*: 1045€.
3. Midiendo la temperatura a distintas alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 ºC. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 ºC, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función altura-temperatura y escribe su expresión analítica. *Sol*: $f(x)=\dfrac{1800-x}{180}$
4. Halla el campo de definición de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\sqrt{4-2x^2-7x}$ b) $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4}$ c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+1}$

5. *Sol*: a) $\left[-4;\dfrac{1}{2}\right]$ b) $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ c) $[3;+\infty)$
6. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$; $g(x)=2+\sqrt{x}$ halla

   a) $f\circ g$ b) g^{-1} c) $g\circ f$ d) $g^{-1}\circ g$

   Sol:

   a) $(f\circ g)=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$ b) $g^{-1}(x)=(x-2)^2$ para $x\geq 2$ c) $(g\circ f)=2+\sqrt{\dfrac{1}{3x-6}}$ d) $(g^{-1}\circ g)=x$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $9^x-3^x-6=0$ b) $2^x+2^{1-x}=3$
   c) $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$ d) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}=21$

   Sol: a) $x=1$ b) $x=1$ c) $x=0;\ x=1$ d) $x=3$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log x=1+\log(33-x)$ b) $\log x-\log 8=\log\dfrac{3}{x+2}$
   c) $\log(22-x)=\log x-1$ d) $\log x^2=\log x+\log 15$

   Sol: a) $x=30$ b) $x=4$ c) $x=20$ d) $x=15$

9. Un cultivo de bacterias crece según la función $y=1+2^{x/10}$ (y: miles de bacterias, x: horas).

   a) ¿Cuántas había en el momento inicial?
   b) ¿Y al cabo de 10 horas?
   c) Calcula cuánto tiempo tardarán en duplicarse.

10. De la función exponencial $f(x)=k\cdot a^x$ conocemos $f(0)=5$ y $f(3)=40$. ¿Cuánto valen los números reales k y a? ¿Puede ser a un número negativo? Justifica la respuesta.

    Sol: $k=5$; $a=2$

Ejercicios de exponenciales y logaritmos

1. Expresa en función de $\log 2$ y $\log 3$ los siguientes logaritmos decimales:

   a) $\log 6$ b) $\log 9$ c) $\log 2000$ d) $\log 1{,}5$ e) $\log\sqrt[4]{2}$ f) $\log 0{,}003$

Sol: a) $\log 2+\log 3$ b) $2\log 3$ c) $3+\log 2$ d) $\log 3-\log 2$ e) $\frac{1}{4}\log 2$ f) $\log 3-3$

2. Sea $f(x)$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le 2\\ 10 & \text{si } x>2\end{cases}$

   a) Dibuja la gráfica de $f(x)$;
   b) Halla el dominio y el recorrido de $f(x)$;
   c) Halla el dominio y el recorrido de la función $g(x)=\log\left[f(x)\right]$.

Sol: b) $D(f)=\mathbb{R};\quad \mathrm{Im}(f)=\{1,\ 10\}$; c) $D(g)=\mathbb{R};\quad \mathrm{Im}(g)=\{0,\ 1\}$

3. Halla el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

   a) $\log(1-x^2)$; b) $\log(x-1)-\log(10-x)$

4. Halla el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=10^x+\log x$ b) $g(x)=a^{\sqrt{x-1}}\ ,a>0$ c) $y=\dfrac{x}{\log x}$ d) $y=\sqrt{\log_3 x}$ e) $y=\log|x|$

Sol: a) $D(f)=\mathbb{R}^+$ b) $D(g)=(1,+\infty)$ c) $D(y)=\mathbb{R}^+$ d) $D(y)=\mathbb{R}^+$ e) $D(y)=\mathbb{R}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $2^x=32$ b) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=14$ c) $9^x-6{\cdot}3^{x+1}+81=0$

   d) $5^x+5^{1-x}=6$ e) $3^{3x-2}=9^{x^2-2}$ f) $25^x-5^{x+1}+6=0$

Sol:

   a) $x=5$ b) $x=2$ c) $x=2$ d) $x=0$; $x=1$

   e) $x=-\dfrac{1}{2}$; $x=2$ f) $x=\log_5 2$; $x=\log_5 3$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\log x+\log 2=1+\log 3$ b) $\log x^2-\log 3=\log x+\log 5$

   c) $\log x+\log 4=\log(x+1)+\log 3$ d) $\log\sqrt{3x+1}+\log 5=1+\log\sqrt{2x-3}$e)

   e) $\log(22-x)=\log x-1$ f) $\log x+\log(3x+5)=2$

Sol: a) $x=15$ b) $x=15$ c) $x=3$ d) $x=\dfrac{13}{5}$ e) $x=20$ f) $x=\nexists$

7. Prueba con ejemplos que las siguientes expresiones son falsas:

   a) $a^{x+y}=a^x+a^y$ b) $a^{\frac{x}{y}}=\dfrac{a^x}{a^y}$ c) $a^{xy}=a^x{\cdot}a^y$

   d) $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_b y$ e) $\log_a(xy)=\log_a x{\cdot}\log_b y$ f) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\log_a x}{\log_b y}$

8. Resuelve la ecuación exponencial $16^x-4^x=240$. Al sustituir 4^x por y, ¿son válidas las dos soluciones que se obtienen para y? ¿Por qué?

<u>Progresiones geométricas</u>

1. Dadas las siguientes sucesiones numéricas, indica cuáles de ellas son progresiones geométricas, escribiendo su razón:

   a) $1,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,...$ b) $1,\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ 2\ ,\ \sqrt{5}\ ,...$ c) $\frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,...$

   d) $6\ ,\ 3\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,...$ e) $2\ ,\ 2\sqrt{5}\ ,\ 10\ ,\ 10\sqrt{5},\ 50,...$ f) $-\frac{3}{2}\ ,\ 1,\ -\frac{2}{3}\ ,\ 2\ ,\ -\frac{4}{9}\ ,...$

   Sol: c) $r = 3$ d) $r = \frac{1}{2}$ e) $r = \sqrt{5}$

2. Calcula el quinto término de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 3$ y de razón $r = \sqrt{2}$. *Sol*: $a_5 = 12$

3. Halla el séptimo término de una progresión geométrica sabiendo que el tercer término es 18 y el quinto 162. *Sol*: $a_7 = 1458$

4. Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica cuyos primeros términos son: $8,\ 4,\ 2,\ 1,...$ *Sol*: $\frac{1023}{64}$

5. Interpolar 3 medios proporcionales entre 3 y 48. *Sol*: $6,\ 12,\ 24$.

6. Halla la suma de todos los términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = -4$ y quinto término $a_5 = -\frac{1}{4}$ *Sol*: $-\frac{8}{3}$

7. Halla el valor de x para que $x,\ x+2,\ 3x+2,\ 9x-2$ estén en progresión geométrica. Calcula después la suma de los infinitos términos de la sucesión, cuyos tres primeros términos son los inversos de los anteriores, para el valor de x encontrado.

   Sol: $x = 2$; $S = \frac{1}{2}$

8. Calcula el producto de los 20 primeros términos de una progresión geométrica de primer término 2 y de razón $\sqrt{2}$. *Sol*: $P_{20} = 2^{105}$

9. Calcula la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente de primer término 0,9 y razón 0,1. *Sol*: 1.

10. Los dos primeros términos de una progresión geométrica son 3 y $\frac{3(\sqrt{5}+1)}{4}$. Halla el quinto término *Sol*: $\frac{3}{256}\left(56+24\sqrt{5}\right)$

11. Calcula el producto de los cinco primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que su primer término es –8 y su razón es –1/2. *Sol*: $P = -32$

12. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 18 y la diferencia entre los dos primeros es 2. Determinar la progresión, sabiendo que está formada por números positivos. *Sol*: $a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$

13. En una progresión geométrica de cinco términos, el último es doble del tercero, siendo el producto de todos sus términos $4\sqrt{2}$. Establecer la progresión.
Sol: $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$

14. Interpolar entre 2 y $2x^2$ tres medios proporcionales.
Sol: $a_2 = \pm 2\sqrt{x}$; $a_3 = 2x$; $a_4 = \pm 2x\sqrt{x}$

15. La suma de tres números en progresión geométrica es 63 y su producto vale 1728. Hallar los números. *Sol*: 3, 12, 48

16. En una progresión geométrica, $a_5 = \sqrt{2}$ y $a_9 = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Determina la razón, la suma de los infinitos términos de la progresión y el producto de los 20 primeros.
Sol: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $S = 8\left(1+\sqrt{2}\right)$; $P_{20} = 2^{-50} \approx 0$

17. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 64. El segundo término es 16. Determina la progresión. *Sol*: $a_n = 32\left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

18. Tres números en progresión geométrica, son proporcionales a 2, 4 y 6 cuando se les resten, respectivamente, 1, 2 y 8 unidades. ¿Cuáles son? *Sol*: 5, 10 y 20.

19. En una progresión geométrica $a_1 = 4$; $a_n = 4096$; $S_n = 5460$. Determina la razón y el número de términos. *Sol*: $r = 4$; $n = 6$.

20. Interpolar tres medios proporcionales entre 12 y 108. *Sol*: $12\sqrt{3}$; 36 ; $36\sqrt{3}$

21. Halla el primer término de una progresión geométrica decreciente sabiendo que su razón es $r = \frac{1}{4}$ y la suma de sus infinitos términos es 8. *Sol*: $a_1 = 6$.

22. Las edades de tres hermanos están en progresión geométrica y suman 21. Sabiendo que la edad del menor es 3, calcula la edad de los otros dos. *Sol*: 3, 6, 12.

23. Calcula el producto de los 25 términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_{13} = 6$. *Sol*: 6^{25}.

24. Determinar tres números en progresión geométrica tales que su suma sea 35 y su producto sea 1000. *Sol*: 5, 10 y 20.

Matemáticas financieras

1. Depositamos 1000€ durante cinco años en un banco que da unos intereses anuales del 3%. Cada año vamos a recoger los intereses producidos. ¿En cuánto dinero se han convertido los 1000€? *Sol*: C=1150€.

2. Depositamos 1000€ en un banco que da unos intereses anuales del 3%. Al cabo de cinco años vamos a recoger los intereses. ¿En cuánto se han convertido los 1000€? *Sol*: C=1159,27€.

3. La maquinaria de una fábrica pierde cada año el 20% de su labor y en su momento costó 250.000€. ¿En cuánto se valorará esta maquinaria después de 11 años de funcionamiento? *Sol*: C=21.474,84

4. ¿A qué tanto por ciento debe imponerse un capital para que se duplique en cinco años? *Sol*: i=14,87%.

5. ¿Qué capital inicial se puso hace ocho años, al 12%, si se ha convertido en 72.000€? *Sol*: $C = 29.079{,}59$ €.

6. ¿Cuántos años han estado colocados 12.000€ si al 8,5% se han convertido en 61.500€? *Sol*: Aproximadamente 20 años.

7. Un emigrante dejó al marchar, en la caja de ahorros, 360 euros al 4%. Cuando volvió tenía 456,28 euros. ¿Cuánto tiempo estuvo fuera? *Sol*: 6 años.

8. ¿Qué cantidad ha de pagarse al final de cada año, en los diez años de amortización de una deuda de 60.000€, al 8%? *Sol*: 8.941,77€

9. Una moto que cuesta 4870€ la pagamos a través de una entidad financiera que cobra el 12% anual. Si queremos pagarla mensualmente durante 3 años, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual? *Sol*: 161,75€

10. Un comerciante comienza la temporada de rebajas descontando un 4% en el precio de los artículos y cada semana que pasa descuenta un 4% del precio de la semana anterior. Si la temporada de rebajas dura 10 semanas, ¿cuál será el precio, al final de las rebajas, de un artículo que sin rebajar costaba 45€? ¿Cuál sería el precio si se descontase directamente el 40%? *Sol*: 29,92€ ; 27€.

11. ¿Qué importe total deberemos devolver por un préstamo de 50.000€ al cabo de cinco años y con un interés compuesto del 9% anual si lo amortizamos mensualmente? *Sol*: 62.275,07€

12. El precio de una cadena musical es de 1.450€ ¿Cuánto pagaremos cada mes si la financiamos al 12% y se paga durante 18 meses? *Sol*: 88,42€.

Polinomios

1. Indica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Si es polinomio indica su grado y su coeficiente principal.

$$P(x)=3x^3-\frac{5}{4}x^4+2\ ;\ Q(x)=x^4-\frac{3}{x}-2\ ;\ S(x)=-7x^6+3x^2-x$$

Sol: grado($P(x)$)=4 ; *coef* = $\frac{-5}{4}$; $Q(x)$ no es polinomio; grado($S(x)$)=6; *coef* $=-7$

2. Desarrolla los siguientes cuadrados:

$$\text{a) } (2x-3y)^2 \quad \text{b) } (x^2+x-1)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{3}{2}-x^2+2x\right)^2$$

Sol: a) $4x^2-12xy+9y^2$ b) $x^4+2x^3-x^2-2x+1$ c) $x^4-4x^3+x^2+6x+\frac{9}{4}$

3. Considera la identidad $A^2-B^2=A+B$, ¿qué relación ha de existir entre A y B para que la diferencia de cuadrados sea igual a la suma? *Sol*: $A=B+1$
4. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^4-6x^3+2x^2+3x-4)\div(x^2+x+2)$ b) $(x^4-5x^3+11x^2-12x+6)\div(x^2-x+2)$

Sol: a) $Q(x)=x^2-7x+7;\ R(x)=10x-18$ b) $Q(x)=x^2-4x+5;\ R(x)=x-4$

5. Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(3x^5+2x+1)\div(x+1)$ b) $(x^6+x^2-3)\div(x+3)$

Sol:
a) $Q(x)=3x^4-3x^3+3x^2-3x+5;\ R(x)=-4$
b) $Q(x)=x^5-3x^4+9x^3-27x^2+82x-246;\ R(x)=735$

6. Razona con ejemplos las siguientes cuestiones:
   a) ¿Cuál es el grado máximo que puede tener la suma de dos polinomios? ¿Y el grado mínimo?
   b) Si se multiplican dos polinomios de grados 6 y 8, respectivamente, ¿qué grado tiene el producto? ¿Y el cociente?
7. ¿Qué es sacar factor común? Aplíquese al siguiente polinomio: $5x^3+15x^2-35x$. ¿En qué propiedad se fundamenta este proceso?
8. Aplicando el teorema del resto, halla el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3-2x^2-3)\div(x-1)$ b) $(a^3-1)\div(a-1)$ c) $(2x^4-2x^3+3x^2+5x+10)\div(x+2)$

Sol: a) –4; b) 0; c) 60.

9. Calcula el valor de m en los siguientes polinomios para que sean divisibles por los binomios que se indican:

a) $(5x^4+mx^3+2x-3)\div(x+1)$ b) $(3x^2-mx+10)\div(x-5)$ c) $(3x^3-7x^2-9x-m)\div(x-3)$

Sol: a) m=0; b) m=17; c) m=–9.

10. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4+5x^3-11x^2-20x+12$ b) $x^5+3x^4-x^3-3x^2$ c) $3x^4-16x^3+23x^2-6x$

11. Si se multiplica el dividendo y el divisor por un número real no nulo, ¿qué sucede con el cociente? ¿Y con el resto? Pon un ejemplo numérico y otro de polinomios.

Fracciones algebraicas

1. Calcula el valor que debe tener a para que el polinomio $(a+1)x^3-(2a-1)x^2+ax-7$ sea divisible por $x+2$. *Sol*: $a=-\dfrac{11}{18}$

2. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ b) $\dfrac{3x^2-6x-9}{2x-6}$ c) $\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-1}$

   d) $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$ f) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

   Sol: a) $x-1$ b) $\dfrac{3(x+1)}{2}$ c) $\dfrac{x^2+3}{x+1}$ d) $x+2$ e) $\dfrac{x-4}{x-7}$ f) $\dfrac{x+2}{x-2}$

3. Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

$$\begin{cases} \text{a) } \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x-1}-\dfrac{1-x}{x^2-1} \\ \text{b) } \dfrac{4}{1+x}+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x+1}{x-1} \\ \text{c) } \dfrac{3}{2x-4}+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8} \end{cases} \qquad Sol\text{: } \begin{cases} \text{a) } \dfrac{5x^2+7x}{x^2-1} \\ \text{b) } \dfrac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1} \\ \text{c) } \dfrac{2}{x+2} \end{cases}$$

4. Opera y simplifica:

   a) $\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x^4+x^3\right)$ b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{x}{4}\right)$

   c) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$ d) $\left(\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}\right)\cdot\dfrac{2x}{x^2+4}$

   Sol: a) $(x+1)\cdot(x^2+x+1)$ b) $\dfrac{x^2+3}{1-x^2}$ c) $\dfrac{x}{x-2}$ d) $\dfrac{4x}{x^2-4}$

5. Halla el polinomio $P(x)$ para que se cumplan las siguientes equivalencias de fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{x-5}{x+1}=\dfrac{P(x)}{x^2-2x-3}$ b) $\dfrac{x}{x^2+2x}=\dfrac{x-1}{P(x)}$

   Sol: a) $P(x)=x^2-8x+15$ b) $P(x)=x^2+x-2$

6. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\begin{Bmatrix} \text{a) } \dfrac{x^4-1}{x^4+x^2} & \text{b) } \dfrac{x^3-2x+x}{x^3-3x^2+3x-1} \\ \text{c) } \dfrac{2x^3+3x^2+6x+9}{2x^4+3x^3-2x-3} & \text{d) } \dfrac{x^3-x-3x^2+3}{x^2-1} \end{Bmatrix} \qquad Sol\text{: } \begin{Bmatrix} \text{a) } \dfrac{x^2-1}{x^2} & \text{b) } \dfrac{x(x+1)}{(x-1)^2} \\ \text{c) } \dfrac{x^2+3}{x^3-1} & \text{d) } x-3 \end{Bmatrix}$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Sara, Raquel y Begoña son una cuadrilla de pintoras que han hecho un trabajo en cuatro días. Sara lo hubiera hecho sola en doce días, y Raquel lo hubiese realizado sola en diez días. ¿Cuánto tiempo habría necesitado Begoña para hacerlo ella sola? (*Solución*: 15 días.)
2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 m. y su perímetro 24 m. ¿Cuánto miden sus catetos? (*Solución*: 6 y 8 m.)
3. Un comerciante vende 45 m. de dos telas diferentes. Una de las telas la vende a 800 pta./m. y la otra a 600 pta./m. Si con la venta ha obtenido un total de 31.000 pta., ¿cuántos metros de cada clase ha vendido? (*Solución*: 20 y 25 m.)
4. La suma de las dos cifras de un número es nueve. Si a ese número le restamos 45 el número que obtenemos es igual al que resulta si se cambia el orden de los dígitos del número inicial. ¿Cuál es dicho número? (*Solución*: 72).
5. Pedro dice a Juan “Tengo el doble de los años que tú tenías cuando yo tenía los que tú tienes. Cuando tú tengas los que yo tengo, entre los dos sumaremos 63 años”. ¿Cuál es la edad actual de Pedro y de Juan? (*Solución*: Pedro tiene 28 y Juan 21).
6. El área de un rectángulo mide 12 cm^2, y su diagonal mide 5 cm. Halla sus dimensiones. (*Solución*: 3 cm % 4 cm)
7. Una autoescuela tiene abiertas tres sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es de 352; pero los matriculados en la tercera son tan sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera. ¿Cuántos alumnos hay matriculados en cada sucursal? (*Solución*: 200; 102 y 50).
8. Tres familias van a una heladería. La primera familia pide tres helados grandes, dos medianos y cuatro pequeños; la segunda familia pide uno grande, dos medianos y dos pequeños, y la tercera pide dos grandes y dos pequeños. La primera familia ha pagado 13 euros, la segunda 7 euros y la tercera 6 euros.
   Plantea un sistema para intentar averiguar el precio de cada helado. ¿Cuál es el valor exacto de cada helado? Resuelve el sistema. (*Solución*: $\left(x = 3 - \lambda; \quad y = 2 - \dfrac{\lambda}{2}; \quad z = \lambda \right)$.
9. Una madre y sus dos hijos tienen en total 60 años; el hijo mayor tiene tres veces la edad del menor, y la madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. Plantea un sistema que resuelva el sistema. (*Solución*: 40; 15 y 5).
10. Los números 2 y 5 son soluciones del sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ -x + y = 1 \end{cases}$; ¿Es correcta esta forma de expresar la solución del sistema?
11. Razona, sin resolverlo, si el sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$; es compatible o no. Razona la respuesta.
12. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más incógnitas que ecuaciones, ¿es necesariamente compatible? Razona la respuesta con un ejemplo.
13. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más ecuaciones que incógnitas, ¿es necesariamente incompatible? Razona la respuesta con un ejemplo.
14. En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Sin resolver el problema, ¿puede afirmarse que no todos son conejos ni todas son gallinas? ¿Por qué?
15. Halla dos números tales que su suma es 14 y la de sus cuadrados es 100. (*Solución*: 8 y 6).

16. Hace 5 años la edad de una persona era el triple de la de otra, y dentro de 5 años será el duplo. Halla las edades de cada una de las personas. (*Solución*: 35 y 15 años).
17. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la cifra de las decenas más el doble de la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número. (*Solución*: 421).
18. Don Carlos le dice a doña Carmen: “Yo tengo el doble de la edad que usted contaba cuando yo tenía la edad que usted tiene. La suma del triple de la edad que usted tiene con la que yo tendré cuando usted tenga la edad que yo tengo es 280. ¿Cuáles son las edades de don Carlos y doña Carmen? (*Solución*: 80 y 60).
19. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x+y=30 \\ x-y=142 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 21x-2y=47 \\ 3(y-47)=x+2 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} \dfrac{5x}{6}+\dfrac{3y}{4}=2 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{7}=2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ x-z=3 \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases} ; \quad \text{f) } \begin{cases} x+y+z=14 \\ x+y-z=0 \\ x-2y+z=-1 \end{cases}$$

20. Halla un número de dos cifras, sabiendo que dicho número es igual al cuádruplo de la suma de sus cifras, y que si al doble del número se le suma su cuarta parte, resulta el cuadrado de la suma de sus cifras. (*Solución*: 36).
21. Decide la posición relativa de los siguientes pares de rectas y, en consecuencia, la compatibilidad de los correspondientes sistemas lineales:

$$\text{a) } \begin{cases} r\equiv 2x+y=6 \\ r'\equiv x+2y=9 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} r\equiv x-y=2 \\ r'\equiv 2x-2y=3 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} r\equiv 3x+5y=-2 \\ r'\equiv 6x+10y=-4 \end{cases}$$

22. Prueba que los sistemas $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-y=-1 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ son equivalentes (tienen la misma solución).
23. Resuelve los sistemas de inecuaciones siguientes:

$$\text{a) } \begin{cases} x-y\geq 12 \\ -x+y-3<0 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x+y<0 \\ 3x-y\geq 0 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x-y\geq -3 \\ 2x+y<0 \end{cases}$$

24. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} \dfrac{1}{2}x+y-1<0 \\ x+y-3\geq 0 \\ 2x-y\leq 1 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x+y\geq 1 \\ y\geq 0 \\ x-1\leq 0 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x+y<1 \\ x-y\leq 2 \\ x+y>3 \end{cases}$$

25. Dado el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y\leq 6 \\ 2x-y\leq 3 \end{cases}$; añade una tercera inecuación de tal manera que el sistema así formado:
    a) Tenga por conjunto solución un triángulo; b) Tenga por conjunto solución una región ilimitada; c) .No tenga solución.

<u>Inecuaciones y sistemas de inecuaciones</u>

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con una variable:

   a) $\dfrac{3(x+1)}{2}-x>\dfrac{x-4}{3}$ b) $\dfrac{x+2}{2}-3(x+1)\geq\dfrac{-5x}{2}-2$

   c) $\dfrac{x-3}{2}+7<\dfrac{5-x}{4}+x$ d) $\dfrac{-3(5-x)}{10}-\dfrac{3x}{2}\leq 7-\dfrac{5x}{3}$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas:

   a) $x^2-6\sqrt{2}x+18\geq 0$ b) $3x^2-x<-1$ c) $(2x+1)x+5\leq 2$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones de fracciones algebraicas:

   a) $\dfrac{4-x}{1-2x}<\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{x-2}{x+3}\geq\dfrac{-1}{5}$ c) $\dfrac{4}{x+3}\leq\dfrac{7}{2x-3}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una variable:

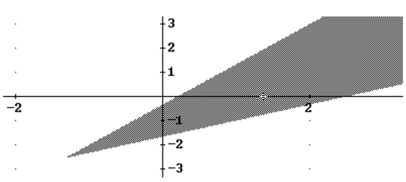
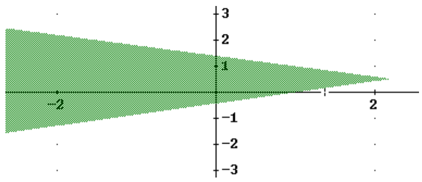
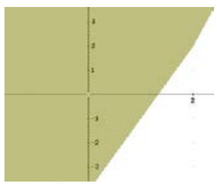
   a) $\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{3}\geq x+4 \\ x-2\geq 0\end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3}\geq x+2 \\ x-\dfrac{1}{5}<3\end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2>4(x-1) \\ \dfrac{1}{10}x\leq x-\dfrac{4}{5}\end{cases}$

   Sol: a) $x\geq\dfrac{13}{3}$ b) $x\leq -5$ c) $\dfrac{8}{9}\leq x<2$

5. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos variables:

   a) $\begin{cases} 2x-3y\leq 5 \\ 5x-3y\geq 1\end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-7y<3 \\ 2x+5y<7\end{cases}$ c) $\begin{cases} 8x-2y\leq 12 \\ 3x-y\leq 4\end{cases}$

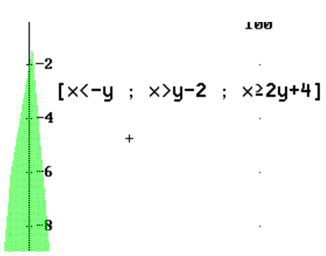
   Sol: a) $x=-\dfrac{4}{3};\quad y=-\dfrac{23}{9};$ b) $x=\dfrac{64}{29};\quad y=\dfrac{15}{29};$ c) $x=2;\quad y=2$

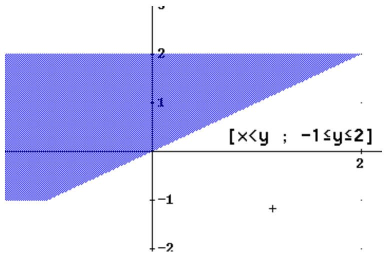




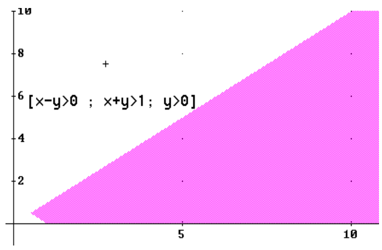
6. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

   a) $\begin{cases} x+2<y \\ x\geq 2y+4 \\ -x>y\end{cases}$ b) $\begin{cases} y\leq 2 \\ y\geq -1 \\ x<y\end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+1>0 \\ x-y>0 \\ y>0\end{cases}$

   Solución:







   a) $(-8,-6)$; $(-1,1)$; $\left(\frac{4}{3},\frac{-4}{3}\right)$ b) $(-1,1)$; $(2,2)$ c) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $(1,0)$

Funciones

1. Halla el dominio de las siguientes funciones. Estudia también si presentan simetrías.

$$\text{a) } f(x)=3x^2+2 \quad \text{b) } g(x)=\sqrt{x-3} \quad \text{c) } h(x)=\frac{1}{x-1} \quad \text{d) } k(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

Sol: a) $D(f)=\mathbb{R}$; Par b) $D(g)=[3,+\infty)$ c) $D(h)=\mathbb{R}-\{1\}$ d) $D(k)=\mathbb{R}$; Impar

2. Los parquímetros municipales de una ciudad presentan el cuadro de tarifas siguiente:

Primera media hora	0,5€
Por cada cuarto de hora o fracción siguiente hasta 2 horas	0,3€
Más de 2 horas (penalización)	10€

   a) Escribe la función matemática asociada a este cuadro.
   b) Calcula la imagen de 45 min.

Sol: a) $f(x)=\begin{cases} 0,5 & si\ 0<x\le 2 \\ 0,3\cdot(x-2)+0,5 & si\ x=2,3,4,5,6,7,8 \\ 10 & si\ \ x>8 \end{cases}$

donde x viene expresado en cuartos de hora.

b) Como 45 min. son tres cuartos de hora, tenemos que $x=3$ y $f(3)=0,8€$.

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=x+2$, estudia si la función compuesta $(f\circ g)(x)$ presenta algún tipo de simetrías. *Sol*: Es par.

4. Calcula la función recíproca de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad \text{b) } g(x)=x^3-1 \quad \text{c) } h(x)=\frac{2}{x+3} \quad \text{d) } k(x)=\frac{x-1}{3-x}$$

Sol: a) $f^{-1}(x)=\dfrac{1-2x}{x+1}$ b) $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$ c) $h^{-1}(x)=\dfrac{2}{x+3}$ d) $k^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$

5. Halla el dominio de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x^2-4} & si\ x<0 \\ -\sqrt{x-2} & si\ x\ge 0 \end{cases} \qquad \text{b) } g(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x} & si\ x\le 3 \\ \dfrac{x^5-3}{x-7} & si\ x>3 \end{cases}$$

Sol: a) $D(f)=\left((-\infty,0)-\{-2\}\right)\cup[2,+\infty)$ b) $D(g)=(-\infty,1]\cup(3,+\infty)-\{7\}$

6. Representa gráficamente la función $f(x)=|3x-2|$ e indica en qué punto alcanza su mínimo absoluto. ¿Está acotada superiormente?

Sol: mínimo = 2/3. No está acotada superiormente.

7. Halla la función de interpolación cuadrática asociada a los siguientes puntos:

X	0	2	3
Y	-3	-1	2

Sol: $f(x)=\dfrac{2x^2-x-9}{3}$

FUNCIONES

1. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 3$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5}$ c) $y = \dfrac{3x+4}{(x-1)(x+2)(x-3)}$

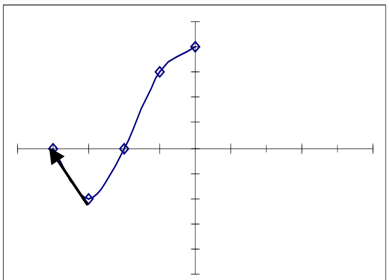
d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$ e) $y = \sqrt{x^2 - 5}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{(x-2(x+3)}$

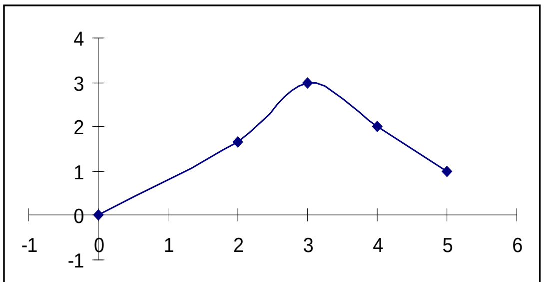
g) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$ h) $g(x) = 5^{\frac{2x+1}{x^2-x-6}}$ i) $y = \log(3x - x^2)$

j) $h(x) = \pi^{\sqrt{2x-x^2}}$ k) $l(x) = |x-5|$ l) $y = Ln(x^2 - 5)$

m) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ n) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ ñ) $y = \sqrt{x^2 + 5x}$

2. La gráfica G1 corresponde a una función periódica, de período P=4, cuyo dominio es (-4,8]. Completa su gráfica.
3. La gráfica G2 corresponde a una función, *f(x)*, representada en el intervalo [0,5]. Complétala en el intervalo [-5,5], suponiendo:
   a) *f(x)* es una función par.
   b) *f(x)* es una función impar.


G1



G2

4. Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \log x$ d) $k(x) = e^{-3|x|}$

e) $l(x) = x - 5x^3$ f) $m(x) = \sqrt[3]{ax^4 + b}$

Solución:

a) Par b) Impar
c) No presenta d) Par
e) Impar f) Par

5. Indica cuál es el recorrido de las siguientes funciones:

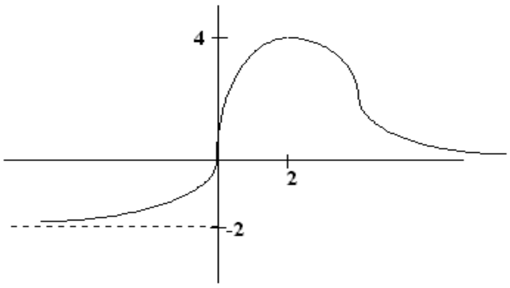
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

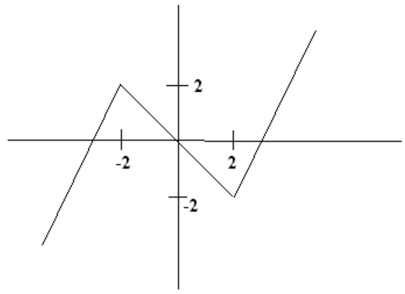
c) $h(x) = \log x$ d) $k(x) = e^{-3|x|}$

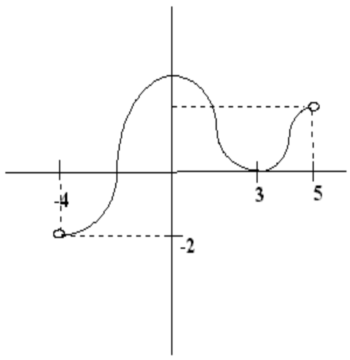
e) $l(x) = x - 5x^3$ f) $m(x) = \sqrt[3]{x^4 + 2}$

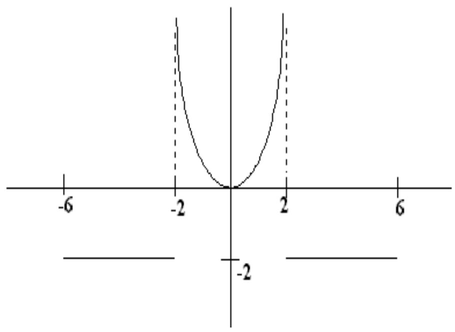
Solución: a) $[-4, \infty]$ b) R
c) R d) R_*^+
e) R f) $\left[\sqrt[3]{2}, \infty\right]$

6. Realiza el estudio completo de las funciones que tienen la siguiente gráfica:









Sol: Gráfica 1: D=R; Img=(-2,4], Crece en (-∞,3), decrece en (3,+ ∞). Está acotada, siendo CI=-2, CS=4. Presenta un máximo absoluto en M=(2,4).

Gráfica 2: D=R, Img=R, Crece en (-∞,-2) ∪ (2,+ ∞). Decrece en (-2,2). Máximo relativo en M(-2,2). Mínimo relativo en (2,-2). No está acotada. Es simétrica respecto del origen (simetría impar).

Gráfica 3: D=(-4,5), Img=(-2,4]. Crece en (-4,0) ∪ (3,5). Decrece en (0,3). Está acotada, siendo CS=3 la cota superior. Presenta un máximo absoluto en M(0,3) y un mínimo relativo en (3,0). CI=-2 es la cota inferior. No tiene mínimo absoluto.

Gráfica 4: D=R, Img=[0,+ ∞) ∪ {-2}. Crece en (0,2), decrece en (-2,0). Está acotada inferiormente, siendo CI=-2 su cota inferior. Es simétrica respecto del eje de ordenadas (es par).

7. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, ¿es continua en $x = -3$? *Sol*: No, ¿por qué?

FUNCIONES

8. Calcula el valor de *k* para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1\\ k & \text{si } x=1\end{cases}$ sea continua en $x=1$.
9. Se desea construir una ventana rectangular de 36 m^2 de luz. Si modificamos la base, manteniendo constante el área, variará también su altura.
   a) Dibuja la gráfica correspondiente que expresa la altura en función de la base.
   b) Estudia la continuidad, crecimiento y variación de la función que expresa la altura en términos de la base.
   c) ¿En qué punto se alcanza el máximo relativo?
10. Representa gráficamente la función $f(x)=|2x+3|$ y estudia su acotación.
11. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ si $x>0$. ¿Es *f* par? ¿Es *f* impar?
12. ¿En qué condiciones una función polinómica es par? ¿E impar?
13. Halla la suma, producto, diferencia, cociente, y función compuesta para las funciones *f* y *g* siguientes, calculando sus dominios:

    a) $f(x)=x^2+1;\ g(x)=\sqrt{x}$ b) $f(x)=x^2+3x+1;\ g(x)=2x-1$ c) $f(x)=5x+2;\ g(x)=\dfrac{2}{x^2}$
14. Después de *t* horas de actividad, una cadena de producción ha fabricado $A(t)=20t-\dfrac{1}{2}t^2$ unidades de cierto aparato. Supongamos que el coste de la manufactura de *x* unidades se expresa, en miles de euros, por $C(x)=30+8x$.
    a) Expresa el coste de manufacturación en función del número *t* de horas de trabajo de la cadena de producción.
    b) ¿Cuál es el coste de las dos primeras horas de producción?
15. Escribe un ejemplo que pruebe que la suma de dos funciones discontinuas puede ser una función continua.
16. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

    a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 1\\ -2x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<1\\ 1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$
17. Calcula los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

    d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-x+2}{2x^4+x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+1}{x^2+2}$

    g) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{\frac{1}{x}}$

Sol: a) $\dfrac{-1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 4 e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$ g) $\nexists$ h) 2 i) 1

<u>Ejercicios de Funciones</u>

1. Calcula el dominio o campo de definición de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^3+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

2. Una función afín cumple: $f(3)=5$; $f(7)=-4$ y $D(f)=[0,10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? ¿Cuál es el valor de su pendiente? ¿Y de la ordenada en el origen? Represéntala.

3. Por un recibo de gas en el que se han consumido 10 m^3 se han pagado 50€ y por 16 m^3 se han pagado 71€. ¿Cuánto habrá que pagar por un consumo de gas de 15 m^3?

4. Dada la parábola $f(x)=x^2-6x+1$, represéntala gráficamente y calcula sus puntos notables (vértice y puntos de corte con los ejes coordenados).

5. Representa la función $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ para $x\geq 1$.

   A partir de ella representa: a) $f(x-5)$ b) $f(-x+2)$

6. Representa las siguientes hipérbolas: a) $y=\dfrac{4}{x-3}+2$ b) $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

7. Representa la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in[-3,0) \\ x^2-2x-3 & \text{si } 0\leq x\leq 3 \\ 0 & \text{si } 3<x<7 \end{cases}$ Indica si está acotada, si presenta máximos y mínimos absolutos y relativos e indica sus intervalos de monotonía.

8. Representa gráficamente la función $f(x)=|2x+1|$. ¿En qué punto alcanza su mínimo valor?

9. Una persona duda entre comprarse un coche de gasolina o uno de gasóleo. El primero consume, cada 100 km, 12 litros de gasolina a 0,97€/l. El segundo consume, cada 100 km, 7 litros de gasóleo a 0,92€/l, y cuesta 3000€ más que el otro modelo. Haz un estudio del gasto total según los kilómetros recorridos y averigua a partir de qué kilometraje resulta más rentable uno que otro.

10. Midiendo la temperatura a distintas alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 ºC. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 ºC, ¿cuál será la temperatura en la cima? ¿Qué temperatura habrá a 450 m de altura? Representa gráficamente la función altura-temperatura y busca su expresión analítica.

11. Calcula mediante interpolación lineal los valores que faltan en la siguiente tabla:

X	23	28	32		35
Y	12		6		18

12. El precio de billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km. he pagado 2,85€ y por 168 km, 13,4€. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km?

"Saber es acordarse".

Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.); filósofo griego

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^3-7x^2+2}{x^3-1}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^4-5x^2}{2x}$ c) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^4+3x+1}{x^3-3x^2-2}$

e) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+9}{x^2-2}\right)^{x^2}$ f) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x+1}{4}\cdot\frac{x-5}{x^2}\right)$ g) $\lim_{x\to \infty} \frac{-4x^3+8x^2-1}{3x^3+2}$ h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{3x-2}$

i) $\lim_{x\to -2} \frac{1}{x^2+3}$ j) $\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2}{x-2}$ k) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-8x+16}{x-4}$ l) $\lim_{x\to 2}\left(x^2-6x\right)$

m) $\lim_{x\to 1} \frac{6x}{7x^2+6x^5}$ n) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x}{6x+5}$ o) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$ p) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)(x+3)}$

q) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x^2+3x}$ r) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^4-81}$ s) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^5}{x^2-16}$ t) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-3x^2-2x}{x^3-2x^2+x-2}$

u) $\lim_{x\to \infty} \frac{-2x^3-x+3}{4x^3+6x-1}$ v) $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$ w) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)$ x) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x}{x+2}$

y) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ z) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-x^2-8x+12}$ aa) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ ab) $\lim_{x\to 5} \frac{x-1}{x-2}$

ac) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-4x}$ ad) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$ ae) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4-3x^2+7x}{x^4+8x}$ af) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x+4}{x^2-4}$

ag) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$ ah) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x}{x+2}$ ai) $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$ aj) $\lim_{x\to \infty} 5^{\frac{x^2-2}{x+3}}$

ak) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^2-3}}$ al) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x-3}{2x}\right)^{x+2}$ am) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-4}}$ an) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$

ao) $\lim_{x\to \infty}(3-x)^{2-x}$ ap) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x^2-5x+6}\right)$ aq) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+3}{1-x}\right)^{1-x}$ ar) $\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{x-1}{x-3}}$

as) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ at) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}\right)$ au) $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-4}$ av) $\lim_{x\to 5}\left(\frac{3x-5}{x^2-4x}\right)^{\frac{1}{x-5}}$

Soluciones:

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 0 d) 0 e) e^{11} f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{-4}{3}$ h) $\frac{-1}{3}$ i) $\frac{1}{7}$ j) $\frac{-1}{2}$ k) 0 l) -8

m) $\frac{6}{13}$ n) $\frac{21}{23}$ o) $\frac{5}{7}$ p) 0 q) $\frac{-1}{3}$ r) $\frac{1}{4}$ s) 0 t) 2 u) $\frac{-1}{2}$ v) 3 w) 0 x) $+\infty$

y) ∞ z) $\frac{3}{5}$ aa) -1 ab) $\frac{4}{3}$ ac) $\frac{1}{8}$ ad) 0 ae) 1 af) $\frac{-5}{2}$ ag) 0 ah) $+\infty$ ai) -1 aj) $+\infty$

ak) 1 al) 0 am) $e^{-1/20}$ an) 1 ao) 0 ap) $\nexists$ aq) 1 ar) e^2 as) $\frac{1}{4}$ at) 1 au) e^3 av) $\nexists$

Derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x^3 - 5x^2 + 6 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 - 10x$

2. $y = \dfrac{5x^2+3}{2x-3} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2(5x^2-15x-3)}{\left(2x-3\right)^2}$

3. $y = \dfrac{x-3}{x+1} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{4}{(x+1)^2}$

4. $y = \sqrt{2x-5} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

5. $y = \left(3x^2+7\right)^5 \quad \rightarrow \quad y' = 30\left(3x^2+7\right)^4$

6. $y = \left(\dfrac{2-x}{3x+1}\right)^4 \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{28\cdot\left(2-x\right)^3}{\left(3x+1\right)^5}$

7. $y = \dfrac{xe^x}{1+x} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{e^x(x^2+x+1)}{\left(1+x\right)^2}$

8. $y = \left(2-x\right)\cdot\sqrt{5x+3} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{4-15x}{2\sqrt{5x+3}}$

9. $y = \dfrac{\ln x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

10. $y = x\cdot\sqrt{x+6} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3(x+4)}{2\sqrt{x+6}}$

11. $y = \dfrac{x-1}{\left(x+1\right)^2} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3-x}{\left(x+1\right)^3}$

12. $y = \sqrt{3x+1} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

13. $y = 5^{-x} \quad \rightarrow \quad y' = -5^{-x}\cdot\ln 5$

14. $y = \ln\left(\dfrac{3x^2+1}{2x^4-3}\right) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2x\cdot\left(6x^4+4x^2+9\right)}{\left(3x^2+1\right)\cdot\left(3-2x^4\right)}$

15. $y = (5x+3)^7 \quad \rightarrow \quad y' = 35\left(5x+3\right)^6$

16. $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x-1} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2x+13}{2\sqrt{x+3}\cdot\left(2x-1\right)^2}$

17. $y = 3^{\frac{2x-1}{1-x}} \quad \rightarrow \quad y' = 3^{\frac{2x-1}{1-x}}\dfrac{\ln 3}{\left(1-x\right)^2}$

18. $y = \ln\dfrac{2x-5}{\sqrt{x-1}} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2x+1}{2\left(x-1\right)\left(2x-5\right)}$

19. $y = \dfrac{x}{x^2+1} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

20. $y = \left(3x-1\right)\cdot(e^{x+1}-3) \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+1}(3x+2)-9$

Derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 7x^4 - 5x^2 + 3x - 1 \quad \rightarrow \quad y' = 28x^3 - 10x + 3$

2. $y = \dfrac{x}{1+x^2} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

3. $y = \dfrac{7}{x^3} \quad \rightarrow \quad y' = -\dfrac{21}{x^4}$

4. $y = \dfrac{3x^2-1}{6x^2+8} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{15x}{\left(3x^2+4\right)^2}$

5. $y = \left(2x^3 - 5x + 3\right)^5 \quad \rightarrow \quad y' = 5\left(2x^3 - 5x + 3\right)^4\left(6x^2 - 5\right)$

6. $y = \left(\dfrac{x-4}{x+6}\right)^6 \quad \rightarrow y' = \dfrac{60\left(x-4\right)^5}{\left(x+6\right)^7}$

7. $y = x^3 e^{1-x} \quad \rightarrow \quad y' = x^2 e^{1-x}\left(3-x\right)$

8. $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 1 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 - 9x + 6$

9. $y = \sqrt{6x^3+1} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{9x^2}{\sqrt{6x^3+1}}$

10. $y = x^{-4} + x^{-3} - x + 1 \quad \rightarrow \quad y' = -4x^{-5} - 3x^{-4} - 1 = -\left(\dfrac{4}{x^5} + \dfrac{3}{x^4} + 1\right)$

11. $y = 2^x + 5^x + 7{\cdot}3^x \quad \rightarrow \quad y' = 2^x \ln 2 + 5^x \ln 5 + 7{\cdot}3^x \ln 3$

12. $y = 6^{(3x+8)^2} \quad \rightarrow \quad y' = 6^{(3x+8)^2+1}\cdot\left((3x+8\right)\cdot\ln 6$

13. $y = \left(7^x\right)^x \quad \rightarrow \quad y' = 7^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 7$

14. $y = \log_5\left(x^3 + 2x - 1\right) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\cdot\log_5 e$

15. $y = \ln(5x+3)^7 \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{35}{5x+3}$

16. $y = \dfrac{\sqrt[3]{5x^2-2}}{x^4} \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{2\cdot\left(12-25x^2\right)}{3x^5\sqrt[3]{\left(5x^2-2\right)^2}}$

17. $y = 3^{\frac{2x-1}{1-x}} \quad \rightarrow \quad y' = 3^{\frac{2x-1}{1-x}}\,\dfrac{\ln 3}{\left(1-x\right)^2}$

18. $y = sen(x^2 + 4x) \quad \rightarrow \quad y' = \left(2x+4\right)\cos(x^2+4x)$

19. $y = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \quad \rightarrow \quad y' = -sen\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\cdot\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

20. $y = \tan\cdot(e^{x+1} - 3) \quad \rightarrow \quad y' = \dfrac{e^{x+1}}{\cos^2\left(e^{x+1}-3\right)}$

Problemas de Optimización

1. Un bote de forma cilíndrica tiene una capacidad de 1/3 de litro. Estudiar las dimensiones óptimas para que el coste del material empleado en su construcción sea mínimo.

   Solución: $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{6\pi}}$; $h = 2r$

2. Un pastor quiere vallar un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie para hacer un aprisco. ¿Cómo le indicaríamos las dimensiones para que el coste fuera mínimo?
   Sol: $x = y = 60$

3. Halla el triángulo rectángulo de superficie máxima entre todos los que tienen 10 cm. de hipotenusa. *Sol*: $c_1 = c_2 = 5\cdot\sqrt{2}$ cm.

4. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo. *Sol*: 5 cm. y 10 cm.

5. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro. Hallar las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible. *Sol*: base = 4 cm.; altura = 5 cm.

6. El dueño de un manantial de agua mineral llega a la siguiente conclusión: si el precio a que vende la garrafa es de *x*€, sus beneficios serán de $-x^2+3x-1,2$ miles de euros al día. Representa la función precio beneficios, e indica:
   a) ¿Qué precio debe poner para obtener un beneficio máximo? *Sol*: 1,5€.
   b) ¿Cuál será este beneficio? *Sol*: 1050€/dia.

7. Halla dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y que su producto sea máximo.

8. Un segmento de longitud l se divide en dos partes que son las bases de dos rectángulos. La altura de uno de los rectángulos es el doble que su base y la del otro el triple que su base. Determina el punto de división del rectángulo de modo que la suma de sus áreas sea mínima.

9. Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Si su precio $f(t)$, en euros, estaba relacionado con el tiempo *t*, en años, que éste llevaba en el mercado por la función:

$$f(t) = \begin{cases} 4t^2+4 & si \quad 0 \le t \le 2 \\ \dfrac{5t}{2}+25 & si \quad 2 < t \le 8 \end{cases}$$

   Se pide:
   a) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función $f(t)$.
   b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo en el mercado?
   c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos seis años?

   Sol: a) $f(x)$ crece en $[0,8]$ b) $M(8,45)$ c) $\text{TVM}_{[2,8]} = \dfrac{f(8)-f(2)}{8-2} = \dfrac{45-20}{6} = \dfrac{25}{6}$

"Lo que de raíz se aprende nunca del todo se olvida".
Séneca (c.5 a. C.-65 d. C.); filósofo hispano latino.

Combinatoria

Ejercicios:

1. Sean los conjuntos

   A={1, 2} y B={*a*, *b*, *c*}

   ¿Cuántas aplicaciones de A en B se pueden establecer?

   Solución: 9.
2. ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir dos premios distintos entre Ramón, Juan, Teresa y María, de modo que ninguno de ellos reciba los dos premios?

   Solución: 12.
3. ¿De cuántos modos diferentes se pueden colocar un plato de carne y otro de pescado en cuatro bandejas de un frigorífico si no se quiere poner dos platos en la misma bandeja?

   Solución: 12.
4. Se tienen cuatro franjas de papel cuyos colores son blanco, rojo, azul y verde. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar? Haz un diagrama en árbol.

   Solución: 24.
5. Calcula m para que se verifique: $V_m^2 + V_{m-2}^2 + V_{m-4}^2 = 98$

   Solución: *m*=8
6. ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en un banco de tres asientos?

   Solución: 120.
7. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si ninguna de ellas se puede repetir?

   Solución: 648.
8. Un barco dispone de ocho banderas. ¿Cuántas señales puede mostrar si cada señal consiste en tres banderas colocadas verticalmente en un asta?

   Solución: 336.
9. Se sabe que el número de variaciones ordinarias de orden 2 de m elementos es 30. ¿Cuál es el valor de m?

   Solución: *m*=6.
10. ¿Cuántos productos diferentes, con cuatro factores, se pueden formar con los números primos comprendidos entre 2 y 19, ambos inclusive,
    a) sin repetir ningún factor?
    b) pudiendo repetir?

    Solución: *a)* 1680; *b)* 4096.
11. Un chico decide pintar las cuatro paredes de su habitación; dispone de pintura de los siguientes colores: azul, verde, blanco, rojo y marrón. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si cada pared ha de quedar pintada de un solo color?

    Solución: 625.
12. Resolver la ecuación: $\mathrm{V}_{\mathrm{x}}^2 - 38 = \dfrac{x+5}{3}$

    Solución: *x*=7

13. Al lanzar una moneda al aire, los resultados posibles son: obtener cara (c) y obtener cruz (x). ¿Cuántos son los resultados posibles al lanzar tres monedas?

    Solución: 8.
14. Se lanzan tres dados diferentes: ¿Cuántos resultados distintos pueden aparecer?

    Solución: 216.
15. ¿Cuántas rectas determinan siete puntos situados en el plano, si no hay tres de ellos en línea recta? (*Observación: Dos puntos determinan una recta.*)

    Solución: 21.
16. Calcular de cuántas formas diferentes pueden repartirse tres premios distintos entre quince concursantes si: a) Cada concursante sólo puede recibir un premio. b) Un mismo concursante puede recibir varios premios.

    Solución: a) 2.730; b) 3.375
17. En un parque hay un camino que une cada dos bancos. ¿Cuántos bancos hay si en total son 36 caminos?

    Solución: 9.
18. Los alumnos de una clase formada por 15 chicos y 15 chicas quieren representar una obra de teatro con 5 personajes femeninos y 3 masculinos. ¿Cuántos repartos distintos se pueden hacer?

    Solución: 983.782.800
19. a) ¿Cuántos números de dos cifras se pueden escribir con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9?; b) ¿Cuántos son pares?; c) ¿Cuántos terminan en tres?; d) ¿Cuántos empiezan por 1?

    Solución: a) 25; b) 0; c) 5; d) 5.
20. a) ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden escribir con los guarismos 1, 3, 4, 5 y 6?; b) ¿En cuántos de ellos figura el 3 en las decenas?; c) ¿Cuántos son pares?

    Solución: a) 625; b) 125; c) 250;
21. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?

    Solución: 24.
22. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra PERMUTACIÓN? ¿Cuántas empiezan por E y terminan en ON?

    Solución: 39.916.800; 40.320
23. En un torneo participan 5 equipos. Forma todas las clasificaciones posibles del torneo.

    Solución: 120.
24. Calcula la suma de todos los números de tres cifras diferentes que se pueden formar con las cifras 2, 4 y 6.

    Solución: 2.664.

25. Se presentan 30 candidatos a unas elecciones para elegir 3 diputados. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer la elección?

    Solución: 4.060

26. Encuentra un número natural x que verifique las ecuaciones siguientes:

    a) $\binom{x}{2}=\binom{x}{7}$; b) $\binom{x}{3}+\binom{5}{4}=\binom{6}{4}$; c) $\binom{2x}{3}=2\cdot\binom{2x-1}{3}$;

    d) $\binom{x}{3}+4\binom{x+1}{3}+\binom{x+2}{3}=8$

    Solución: a) x=9; b) x=5; c) x=3; d) x=3.

27. Un estudiante debe responder a ocho de las 20 preguntas de que consta un cuestionario. ¿Cuántos grupos de respuestas distintas puede elegir?

    Solución: 125.970

28. En un programa de televisión hay 8 presentadores. Cada vez aparecen tres. ¿Cuántos programas podemos ver sin que se repitan los tres?

    Solución: 56.

29. Calcula: a) $(x^2+2x)^3$; b) $(x-3x^3)^4$; c) $\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)^5$

    Solución: a) $x^6+6x^5+12x^4+8x^3$; b) $x^4-12x^6+54x^8-108x^{10}+81x^{12}$;

    c) $x^{10}-\frac{5}{2}x^9+\frac{5}{2}x^8-\frac{5}{4}x^7+\frac{5}{16}x^6-\frac{1}{32}x^5$

30. Determina el término que ocupa el lugar 207 en el desarrollo de $(x^2-3)^{209}$

    Solución: $\binom{209}{206}(x^2)^3(-3)^{206}=\binom{209}{206}\cdot 3^{206}x^6$

31. Se dispone de 15 libros distintos; 6 están encuadernados en cuero, 5 en tela y 4 en rústica. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocare en un estante de modo que no se separen los volúmenes de un mismo tipo de encuadernación?

    Solución: $3!\cdot(6!\cdot 5!\cdot 4!)=12.441.600$

32. Con un piano de juguete de 24 notas (dos octavas completas) ¿cuántos sonidos diferentes pueden conseguirse empleando cada vez cuatro notas como máximo?

    Solución:12.950

33. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 17 bolas de billar, si hay siete negras, seis rojas y cuatro blancas?

    Solución: 4.084.080

34. Escribe directamente el cuarto término del desarrollo $(x-2y^2)^8$

    Solución: $-448x^5y^6$

35. El tercer término del desarrollo de $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^n$ es de grado 7. Hallar n.

    Solución: n=5.

36. ¿Cuántas diagonales hay en un hexágono? ¿Y en un polígono convexo de n lados?

 Solución: 9; $\dfrac{n^2-3n}{2}$

37. ¿Cuántas palabras de 5 letras podemos formar que tengan las mismas letras que la palabra BARRA. ¿Cuántas empiezan por A y terminan por R?

 Solución: 30 y 6.

38. ¿De cuántas maneras se pueden introducir ocho tarjetas postales diferentes en ocho sobres de distintos colores, suponiendo que en un sobre no puede meterse más de una tarjeta?

 Solución: 40.320

39. En una reunión hay 3 chicas y 7 chicos. a) ¿Cuántos grupos de cuatro personas podemos formar? ¿Y si en cada grupo hay dos chicos y dos chicas?

 Solución: a) 210; b) 63.

40. Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6 y 8, a) ¿cuántos números de tres cifras podemos formar?; ¿cuántos de ellos serán impares y mayores que 600?; b) ¿cuántos números de cuatro cifras distintas podemos formar que sean menores que 5.000 y terminen en 2?

 Solución: a) 216 y 12; b) 24.

41. Tres matrimonios van al cine y se sientan en 6 butacas consecutivas.
 a) ¿De cuántas formas pueden colocarse?
 b) ¿Y si cada matrimonio se sienta ocupando dos butacas consecutivas?
 c) ¿Y si los tres maridos se sientan en butacas consecutivas y las esposas también?

 Solución: a) 720; b) 48; c) 72.

42. El alfabeto de un país está formado por 24 letras. Además, en ese país las matrículas de los coches se forman con dos letras seguidas de cuatro dígitos.
 a) ¿Cuántos coches se pueden matricular con ese sistema?
 b) ¿Cuántas de las matrículas tienen las letras iguales y los números distintos?

 Solución: a) 5.760.000; b) 120.960

43. Del número de teléfono de un amigo recordamos que empieza por 30 y que además tiene dos doses, un cinco y dos nueves. ¿Cuántas llamadas tendremos que hacer como máximo para localizar a nuestro amigo?

 Solución: 30

44. Con 5 vocales y 20 consonantes, ¿cuántas “palabras” de 6 letras, 3 vocales y 3 consonantes, se pueden formar de modo que no estén ni dos vocales ni dos consonantes seguidas no pudiendo repetir ninguna letra?

 Solución: 820.800

45. Un bote de 8 remos va a ser tripulado por un grupo seleccionado de 11 hombres, de los cuales tres pueden llevar el timón, pero no pueden remar, y el resto pueden remar pero no llevar el timón. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo si dos de los hombres sólo pueden remar a babor?

 Solución: 25.920

46. Sea A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Se pide:
    a) El número de subconjuntos de A con tres elementos.
    b) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos.
    c) El número de subconjuntos de A con tres elementos como máximo.
    d) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos como mínimo.
    e) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos, dos pares y dos impares.
    f) ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras pueden escribirse con las cifras de A de modo que empiecen y terminen en cifra impar, y que las restantes cifras sean números pares? De estos, ¿cuántos tienen todas sus cifras distintas?

    Solución: a) 35; b) 35; c) 64; d) 64; e) 18; f) 144 y 72.

47. De 7 españoles y 4 franceses se va a elegir un comité de 6 personas. ¿De cuántas maneras puede formarse,
    a) de modo que haya exactamente dos franceses?
    b) de modo que haya dos franceses como mínimo?

    Solución: a) 210; b) 371.

48. En un banquete la mesa de la presidencia es rectangular y tiene siete cubiertos preparados, todos ellos a un mismo lado. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse los siete comensales? ¿ Y si la mesa hubiese sido redonda y la distancia entre dos cubiertos consecutivos, la misma para todos?

    Solución: 5.040 y 720, respectivamente.

48. Hay dos obras de tres volúmenes cada una y otras dos de dos volúmenes cada una. ¿De cuántas maneras pueden colocarse los diez libros en un estante capaz para diez libros, si deben quedar de tal modo que no se separen los volúmenes de una misma obra?

    Solución: 3.456.

49. En un estante de una librería capaz para 25 volúmenes, hay 7 ejemplares iguales de “El Quijote”, 8 ejemplares iguales de “La Celestina” y 10 ejemplares iguales de “La venganza de Don Mendo”. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse dichos libros?

    Solución: 21.034.470.600

50. ¿Cuántas palabras de 7 letras distintas pueden escribirse con las letras de la palabra CADAQUES?

    Solución: 5.040

51. ¿Cuántos modelos de billete de tren se deben imprimir para cubrir un trayecto de diez estaciones, si en cada estación ha de figurar la estación de salida en primer lugar, y la llegada en segundo lugar?

    Solución: 90.

52. Una hormiga desea ir desde el extremo inferior izquierdo de un tablero de ajedrez, hasta el extremo superior derecho, recorriendo la mínima distancia posible y con la condición de pasar únicamente por los bordes de los cuadritos (nunca en diagonal). ¿De cuántas maneras distintas puede hacerlo?

    Solución: 121.870 (Cada recorrido mínimo consta de 16 bordes: 8 h y ocho v).

Ejercicios de Estadística

1. Las puntuaciones de 30 alumnos son:

6	2	5	4	5	8	3	10	6	7
5	2	6	3	4	5	2	1	6	9
4	5	2	5	6	5	7	6	3	8

   a) Confeccionad la tabla de frecuencias y dibujar el diagrama de barras correspondiente.
   b) Hallar las medidas de centralización y de dispersión.

2. Los pesos de 10 alumnos son: 55 66 60 48 48 51 65 63
   a) Hallad las medidas de centralización y de dispersión.
   b) Calculad los cuantiles y los percentiles P_{12}, P_{38} y P_{65}.

3. Obtener la tabla de frecuencias de las vocales que aparecen en la frase siguiente:

   "Por la calle del ya voy, se va a la casa del nunca"

   ¿Tiene sentido calcular la media, la mediana y las medidas de dispersión? Hallad la moda.

4. Al investigar los precios de cierto artículo en 40 establecimientos distintos, se obtuvieron los siguientes valores:

60	68	74	67	68	84	75	88	75	83
75	73	67	74	78	77	75	80	74	77
87	86	65	74	72	73	70	73	71	85
64	82	80	76	78	75	71	72	76	84

   a) Formad la tabla de frecuencias usando 6 intervalos de clase. Dibujad el histograma correspondiente.
   b) Hallad las medidas de centralización y de dispersión con los datos agrupados.
   c) Comparad la moda y la mediana de los datos agrupados con la moda y la mediana de los datos sin agrupar.

5. En la siguiente tabla se recogen las estaturas y los pesos de 16 personas:

		Estaturas			
		(1,55-1,65]	(1,65-1,75]	(1,75-1,85]	
Pesos	**Marcas**	1,60	1,70	1,80	**Total**
(50-62]	56	5	2	0	7
(62-74]	68	1	4	2	7
(74-86]	80	0	1	1	2
	Total	6	7	3	16

Calculad las medidas de centralización y de dispersión de cada una de las variables. Calculad también la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Tiene sentido hallar la recta de regresión de los pesos con respecto a la altura? En caso afirmativo hállala.

6. Una factoría de refrescos ha llevado a cabo un estudio sobre el número de refrescos que se consumen en función de la temperatura que haga ese día. Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

X (Temp. ºC)	10	28	12	31	30	15	19	24	5
Y (Nº de refrescos)	21	65	19	72	75	24	38	67	11

¿Puede la factoría planificar la cantidad de producción en función de la temperatura esperada? ¿De qué forma?

7. En la siguiente tabla se han recogido los datos correspondientes a las estaturas (en cm.) correspondientes a niños de hasta 8 años:

X (Edad)	4	5	5	6	6	7	7	8	8
Y (Talla)	107	115	112	120	119	123	129	128	132

¿Existe alguna correlación entre las edades y sus correspondientes tallas? ¿Tiene sentido hallar la talla para una persona de 30 años, aplicando los resultados anteriores?

8. La siguiente tabla recoge las notas de Matemáticas y Ciencias Sociales de 30 alumnos:

Matemáticas	4	4	5	5	6	7	7
CC Sociales	4	5	5	6	7	6	7
Frecuencias	3	5	7	6	4	3	2

a) Calculad las medidas de centralización y de dispersión de cada una de las variables marginales.

b) Hallad la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Cuál es la recta de regresión de las CC. Sociales con respecto a las Matemáticas?

9. Los gastos en publicidad y ventas (en miles de euros) de una compañía durante diez años consecutivos han sido los siguientes:

Publicidad	7	8	8,5	10	11	12,5	13	14	15	17
Ventas	200	210	230	235	240	280	270	305	315	325

a) Hallad la recta de regresión de las ventas con respecto a la publicidad. ¿Cuál será la cifra de ventas esperada para una inversión en publicidad de 20.000€?

b) Para un volumen de 400.000€ ¿qué gastos de publicidad corresponden?

10. Dada la siguiente serie de datos:

X	12	10	16	14	18
Y	30	28	33	31	34

a) Hallad los parámetros de centralización y de dispersión de cada una de las variables.

b) Hallad el coeficiente de correlación.

c) Hallad la recta de regresión de X sobre Y.