Límites

1. Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x+2}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-(1+x)^2}{x^2-3}$ f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ g) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x}$

j) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5x-6}{x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+3}$ l) $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{x}{x^2-9}}$ m) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{x}}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ p) $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}}$ q) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{3x+1}{x^2}-\dfrac{3}{x}\right)$ r) $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$

Soluciones:

a) 2 b) 0 c) $\nexists$ d) $\nexists$ e) -1 f) -2 g) $\dfrac{1}{4}$ h) $-\dfrac{1}{2}$

j) $\nexists$ k) e^{-1} l) $\nexists$ m) $+\infty$ n) 1 p) 1 q) $+\infty$ r) 1

2. Una función definida en la recta real es estrictamente creciente. ¿Puede deducirse de esto que su límite en $+\infty$ es $+\infty$? Si la respuesta es negativa, da un ejemplo que lo aclare.
3. Escribe dos funciones f y g cuyo límite en $+\infty$ sea $+\infty$ y tal que la diferencia $f-g$ tienda en $+\infty$ al número 2.
4. ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? Razona la respuesta gráficamente.
5. Una función tiene límite en un punto y en cualquier entorno suyo la función toma valores positivos y negativos. ¿cuánto vale en este caso el límite?
6. El límite de una función se calcula en el punto $x=a$, ¿es necesario que este punto pertenezca al dominio o campo de definición de la función? ¿Por qué?
7. ¿Puede ocurrir que dos funciones f y g no tengan límite finito en un punto $x=a$ y que, sin embargo, su cociente $c(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sí tenga límite finito en dicho punto? En caso afirmativo, da un ejemplo.
8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6^x}{2^x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x+1}}{1+2^x}$ c) $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^3-8}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x^3+1}{3x^2+1}\right)^{3-2x}$

Soluciones: a) 0 b) 2 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) 0

"Libros, caminos y días dan al hombre sabiduría".
Proverbio árabe

Continuidad de funciones

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$a)\ f(x)=\begin{cases} 3x-x^2 & si\ x\le 3 \\ \sin(\pi x) & si\ x>3 \end{cases}\quad en\ x=3.\qquad b)\ g(x)=\begin{cases} 2x-5 & si\ x<1 \\ 5 & si\ x=1 \\ x^2-4 & si\ x>1 \end{cases}\quad en\ x=1$

$c)\ h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} & si\ x<1 \\ x-\dfrac{2}{3} & si\ x\ge 1 \end{cases}\quad en\ x=1\qquad d)\ k(x)=\begin{cases} 3x & si\ x<2 \\ 6 & si\ x=2 \\ x-2 & si\ x>2 \end{cases}\quad en\ x=2$

Si presentan discontinuidad indica de qué tipo y en el caso de que la discontinuidad sea evitable, indica cómo se podría evitar.

Sol: a) Continua; b) Discont evitable; c) Discontinua. Salto 1/3; d) Discont. Salto 2.

2. Determina los valores de k en las siguientes funciones para que sean continuas en los puntos que se indican:

$a)\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^5+4x^4}{kx^4} & si\ x\ne 0 \\ -2 & si\ x=0 \end{cases}\quad en\ x=0\ ;\qquad b)\ g(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+k)(x-2)}{x^2-5x+6} & si\ x\ne 2 \\ 6 & si\ x=2 \end{cases}\quad en\ x=2$

$c)\ h(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^4+3x^3}{5x^3+kx^3} & si\ x\ne 0 \\ \dfrac{2}{7} & si\ x=0 \end{cases}$

Sol: $a)\ k=-2;\ b)\ k=-8;\ c)\ k=\dfrac{11}{2}$

3. Dadas las funciones

$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x>1 \\ 2x-3 & si\ x\le 1 \end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x^2+x-2 & si\ x\ge 1 \\ x+4 & si\ x<1 \end{cases},$

clasifica las discontinuidades de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Sol: En $x=-4\ y\ x=-2$ discontinuidades inevitables de salto infinito. En $x=1$ discontinuidad evitable.

4. Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^3+bx^2-6x}$. Sabiendo que es discontinua en $x=2$, calcula b y clasifica todas sus discontinuidades. *Sol*: $b=5$.

5. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si\ x<1 \\ 5x-3 & si\ 1\le x<2 \\ x+a+2b & si\ x\ge 2 \end{cases}$. Determina los valores de a y b para que sea continua en toda la recta real.

6. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x=2 \\ \dfrac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & si\ x\ne 2 \end{cases}$ en el punto $x=2$.

Teoremas de continuidad

1. Dada la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, comprueba que:

   a) En los extremos del intervalo $[0,5]$ los valores de la función son de distinto signo.

   b) La única solución de la ecuación $f(x)=0$ es $x=-2\notin(0,5)$

   ¿Contradicen estos resultados el Teorema de Bolzano? ¿Por qué?

2. Prueba que la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ es continua en el intervalo $[-1,1]$. Sin resolver la ecuación $\sqrt{x^2+x+1}=1.5$, demuestra que tiene alguna solución.

3. La función $f(x)=\cot x$ verifica que $f\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)=-1$ y $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, ¿significa esto que la ecuación $\cot x=0$ tiene alguna solución en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$? En caso afirmativo halla dicha solución.

4. Demuestra que el polinomio $P(x)=3x^4-5x+1$ tiene al menos dos raíces reales.

5. Demuestra que la ecuación $x^5=\dfrac{x+1}{x}$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1,2]$

6. Demuestra que existe algún valor real tal que $\sin x=2x-3$.

7. Sea $f:\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\tan x & si\ x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & si\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

   La función verifica $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$; $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=-1$. Sin embargo $f(x)\neq 0\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$

   ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razona la contestación.

8. Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

   a) ¿Es continua en $[0,1)$?

   b) ¿Alcanza un mínimo absoluto en el intervalo $[0,1)$?

   c) ¿Contradice esto el teorema de Weierstrass? ¿Por qué?

9. Si $f(x)$ es continua en $[2,7]$ siendo $f(2)=-2$ y $f(7)=4$, ¿puedes afirmar que en algún punto $c\in(2,7)$ se verifica $f(c)=1$? Justifica la respuesta.

10. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & si\ x<a\\ \dfrac{4}{x^2} & si\, x>a\end{cases}$. Halla a y define $f(a)$ para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real.

11. Pruébese que la ecuación $3x=e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

12. ¿Existen máximo y mínimo absolutos de la función $f(x)=\cos x+1$ en el intervalo $[0,\pi]$? Justifíquese su existencia y calcúlense.

Derivadas

Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 7x^4 - 5x^2 + 3x - 1 \quad \to \quad y' = 28x^3 - 10x + 3$
2. $y = \dfrac{x}{1+x^2} \quad \to \quad y' = \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$
3. $y = \dfrac{7}{x^3} \quad \to \quad y' = -\dfrac{21}{x^4}$
4. $y = \dfrac{3x^2-1}{6x^2+8} \quad \to \quad y' = \dfrac{15x}{\left(3x^2+4\right)^2}$
5. $y = \left(2x^3 - 5x + 3\right)^5 \quad \to \quad y' = 5\left(2x^3 - 5x + 3\right)^4\left(6x^2 - 5\right)$
6. $y = \left(\dfrac{x-4}{x+6}\right)^6 \quad \to \quad y' = \dfrac{60\left(x-4\right)^5}{\left(x+6\right)^7}$
7. $y = x^3 e^{1-x} \quad \to \quad y' = x^2 e^{1-x}\left(3-x\right)$
8. $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 1 \quad \to \quad y' = 3x^2 - 9x + 6$
9. $y = \sqrt{6x^3+1} \quad \to \quad y' = \dfrac{9x^2}{\sqrt{6x^3+1}}$
10. $y = x^{-4} + x^{-3} - x + 3\pi \quad \to \quad y' = -4x^{-5} - 3x^{-4} - 1 = -\left(\dfrac{4}{x^5} + \dfrac{3}{x^4} + 1\right)$
11. $y = 2^x + 5^x + 7{\cdot}3^x \quad \to \quad y' = 2^x \ln 2 + 5^x \ln 5 + 7{\cdot}3^x \ln 3$
12. $y = 6^{(3x+8)^2} \quad \to \quad y' = 6^{(3x+8)^2+1}{\cdot}\left((3x+8\right){\cdot}\ln 6$
13. $y = \left(7^x\right)^x \quad \to \quad y' = 7^{x^2}{\cdot}2x{\cdot}\ln 7$
14. $y = \log_5\left(x^3 + 2x - 1\right) \quad \to \quad y' = \dfrac{3x^2+2}{x^3+2x-1}{\cdot}\log_5 e$
15. $y = \ln(5x+3)^7 \quad \to \quad y' = \dfrac{35}{5x+3}$
16. $y = \dfrac{\sqrt[3]{5x^2-2}}{x^4} \quad \to \quad y' = \dfrac{2{\cdot}\left(12 - 25x^2\right)}{3x^5\sqrt[3]{\left(5x^2-2\right)^2}}$
17. $y = 3^{\frac{2x-1}{1-x}} \quad \to \quad y' = 3^{\frac{2x-1}{1-x}}\dfrac{\ln 3}{\left(1-x\right)^2}$
18. $y = sen(x^2 + 4x) \quad \to \quad y' = \left(2x+4\right)\cos(x^2+4x)$
19. $y = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) \quad \to \quad y' = -sen\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right){\cdot}\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$
20. $y = \tan{\cdot}(e^{x+1} - 3) \quad \to \quad y' = \dfrac{e^{x+1}}{\cos^2\left(e^{x+1}-3\right)}$

DERIVADAS (2)

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=\ln 4+\sqrt{7}$ c) $f(x)=2(1+x)^{-5}$

d) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$ f) $f(x)=\left(x^2+3x\right)\cdot\left(1-2x\right)$

g) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}-5x^2\right)^{1/2}$ h) $f(x)=\left(x^{-2}+x-1\right)^4$ i) $y=3^{x^2+x-1}$

j) $y=e^{x^{-2}+3x}$ k) $y=\ln\dfrac{6x^2 1}{2x^2-x+1}$ l) $y=\log_3\dfrac{1}{x-2}$

m) $y=\operatorname{sen}(1+x^2)$ n) $y=\operatorname{tg}\dfrac{1-x}{1+x}$ p) $y=\ln(\ln x)$

2. Calcular la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $y=x\operatorname{sen}x$ b) $y=\operatorname{tg}x$ c) $y=\ln(x+1)$

d) $y=e^{2x-1}$ e) $y=\operatorname{arctg}(1+x)$ f) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$

g) $y=\cos x$ h) $y=e^x\operatorname{sen}x$ i) $y=e^{-x^2}$

3. Calcula la derivada n-ésima de la función $f(x)=xe^x$

4. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y=\dfrac{3}{4}+x^2, a=\dfrac{1}{2}$ b) $y=5+3x^2, a=0$ c) $y=2\sqrt{x}, a=4$ d) $y=\dfrac{3x}{1-x}, a=0$ e) $y=x^2+2x, a=1$

5. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y=x^2-7x+3$ es paralela a la recta $5x+y-3=0$?
Solución: (1,-3)

6. Halla la recta tangente a la curva $y=1+x-x^2$ que es paralela al eje de abscisas. *Sol*: $y=\dfrac{5}{4}$

7. Dada la función $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x\le 1\\ -2+2x & \text{si } x>1\end{cases}$, estudia si es derivable en todos los puntos de su dominio.
Sol: Es derivable en todo punto excepto en x=1.

8. Estudiar si la función $F(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & \text{si } 0\le x<\dfrac{\pi}{4}\\ \cos x & \text{si } \dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ es derivable en el punto de abscisa $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
Sol: No lo es (¿por qué?)

9. Hallar la función derivada de la función $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+1) & \text{si } x<1\\ e^{2x} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

10. ¿En qué punto de la curva $y=\ln x$ la ecuación de la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (1,0) y (e, 1)? *Sol*: $\left(e-1,\quad \ln(e-1)\right)$

Enseñar no es una función vital, porque no tienen el fin en sí misma; la función vital es aprender.

Aristóteles