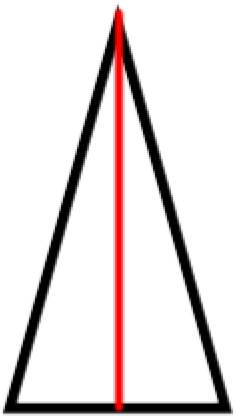
1. Halla la longitud exacta de la altura correspondiente al lado desigual de un triángulo isósceles de perímetro 32 cm y cuyo lado desigual mide 12 cm.



$$P = 32 = 2\ell + 12 \Rightarrow \ell = 10\,\text{cm}$$

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,\text{cm}$$

2. Simplifica al máximo:

a) $\dfrac{8^5 \cdot 32 \cdot 2^{-3}}{4^2 \cdot 2^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125} - 4\sqrt{20} - \sqrt{5}$ d) $\dfrac{2}{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}$

a) $$\frac{\left(2^3\right)^5 \cdot 2^5 \cdot 2^{-3}}{\left(2^2\right)^2 \cdot 2^5} = \frac{2^{15+5-3}}{2^{4+5}} = \frac{2^{17}}{2^9} = 2^8$$

b) $$\sqrt[12]{\frac{3^{20} \cdot 5^9}{3^2 \cdot 5^3}} = \sqrt[12]{3^{18} \cdot 5^6} = 3\sqrt[12]{3^6 \cdot 5^6} = 3\sqrt{15}$$

c) $$\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} + 2 \cdot 5\sqrt{5} - 4 \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

d) $$\frac{2\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{2\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)}{12 - 6} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$$

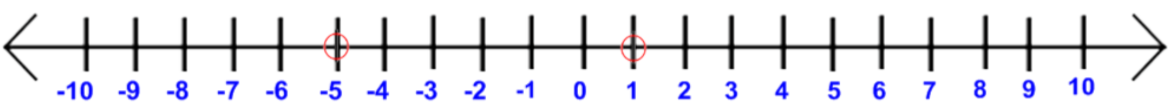
3. Expresa en función de log2 y log3: a) log6; b) log 0.06; c) log15; d) log12

a) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$; b) $\log 0.06 = \log \dfrac{6}{100} = \log 6 - \log 10^2 = \log 2 + \log 3 - 2$

c) $\log 15 = \log\left(3 \cdot \dfrac{10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 1 + \log 3 - \log 2$; d) $\log 12 = \log\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\log 2 + \log 3$

4. Expresa en forma de intervalo y representa en la recta real: $|x + 2| < 3$

$|x + 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + 2 < 3$; $-3 - 2 < x < 3 - 2 \Rightarrow -5x < x < 1$; $x \in (-5, 1)$



5. Halla los valores de x que satisfacen la igualdad $x-|3x-6|=-1$

$$|3x-6|=\begin{cases}-3x+6 & 3x-6\le 0\\ 3x-6 & 3x-6>0\end{cases}\Rightarrow |3x-6|=\begin{cases}-3x+6 & \text{si } x\le 2\\ 3x-6 & \text{si } x>2\end{cases}$$

$$x-|3x-6|=-1\Leftrightarrow\begin{cases}x-(-3x+6)=-1\,;\ x=\dfrac{5}{4}<2\\ \\ x-(3x-6)=-1\,;\ x=\dfrac{7}{2}>2\end{cases}$$

Las soluciones son $x_1=\dfrac{5}{4}\,;\ x_2=\dfrac{7}{2}$

6. Un líquido se evapora a razón del 5% cada hora. Si en un recipiente hay 200 litros:
   a) ¿cuántos litros quedarán al cabo de 5 horas?
   b) ¿Cuántas horas han de transcurrir para que queden menos de 100 litros?

a) $n(\ell)=200(0{,}95)^5\simeq 154.75\ \ell$

b) $n(\ell)<100\,;\ 200(0.95)^h=100$

$$(0.95)^h=\frac{100}{200}\Rightarrow\log(0.95)^h=\log\frac{1}{2}\,;\ h\cdot\log(0.95)=\log(0.5)$$

$$h=\frac{\log(0.5)}{\log(0.95)}\simeq 13.51\,\text{horas}=13\text{h } 30\text{ min } 36\text{ seg}\Rightarrow h\ge 13\text{h } 31\,\text{min}$$

7. Calcula el término general y la suma de los 20 primeros términos de la progresión:

$$1\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{4}{9}\,;\ \frac{8}{27}\,;\ldots$$

$$a_n=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\,;\ a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\frac{a_1\left(r^{20}-1\right)}{r-1}=\frac{1\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{20}-1\right]}{\frac{2}{3}-1}=\frac{3^{20}-2^{20}}{3^{20}/3}=\frac{3^{20}-2^{20}}{3^{19}}\simeq 2.9991$$

8. Calcula el tanto por ciento anual de interés compuesto al que se ha invertido, durante 5 años, un capital de 36000€ con abono mensual, si se ha convertido en 38225€.

$$C_f=C_i\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\cdot 5}\Leftrightarrow 38225=36000\left(1+\frac{r}{12}\right)^{60}\Rightarrow\left(1+\frac{r}{12}\right)^{60}=\frac{38225}{36000}\Rightarrow 1+\frac{r}{12}=\sqrt[60]{\frac{38225}{36000}}$$

$$\frac{r}{12}=\sqrt[60]{\frac{38225}{36000}}-1\,;\ r=12\cdot\left(\sqrt[60]{\frac{38225}{36000}}-1\right)\simeq 0.012=1.2\%$$

1. Simplifica: a) $\dfrac{\sqrt{a^3b^2}\cdot\sqrt{b\sqrt{a}}}{\sqrt{ab}}$; b) $\sqrt[4]{8\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[6]{32}}}$

Solución:

a) $\sqrt{\dfrac{a^3b^2}{ab}}\cdot\sqrt{\sqrt{b^2a}}=\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[4]{b^2a}=a\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{b^2a}=a\cdot\sqrt[4]{b^2\cdot b^2a}=ab\sqrt[4]{a}$

b) $\sqrt[4]{2^3\cdot\sqrt[5]{2^4\cdot\sqrt[6]{2^5}}}=\sqrt[4]{\sqrt[5]{2^{15}\cdot 2^4\cdot\sqrt[6]{2^5}}}=\sqrt[20]{2^{19}\cdot\sqrt[6]{2^5}}=\sqrt[20]{\sqrt[6]{2^{114}\cdot 2^5}}=\sqrt[120]{2^{119}}$

2. Calcula:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Solución:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}-2\cdot3-\sqrt{18}}{2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}-3\sqrt{2}-6}{4\cdot3-6}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}-3\sqrt{2}-6}{6}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{15}-3}{5-3}=\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{15}-3}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}-3\sqrt{2}-6}{6}+\frac{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{15}-3}{2}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{30}-3\sqrt{2}-6+6\sqrt{5}+6\sqrt{3}-3\sqrt{15}-9}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{30}-\sqrt{15}+6\sqrt{5}+6\sqrt{3}-3\sqrt{2}-15}{6}$$

3. Calcula:

a) $\log_2 18-\log_2 36+2\log_2 4-1$ b) $\log_3 81+\log_3 27-5\log_3 9$ c) $\log_5 15+\log_5 45-\log_5 135$

Solución:

a) $\log_2\left(2\cdot3^2\right)-\log_2\left(2^2\cdot3^2\right)+\log_2\left(2^2\right)^2-1=\log_2\left(\dfrac{2\cdot3^2\cdot2^4}{2^2\cdot3^2}\right)-1=\log_2\left(2^3\right)-1=3-1=2$

b) $\log_3\left(3^4\right)+\log_3\left(3^3\right)-\log_3\left(3^2\right)^5=\log_3\left(\dfrac{3^4\cdot3^3}{3^{10}}\right)=\log_3\left(3^{-3}\right)=-3$

c) $\log_5\left(3\cdot5\right)+\log_5\left(3^2\cdot5\right)-\log_5\left(3^3\cdot5\right)=\log_5\left(\dfrac{3\cdot5\cdot3^2\cdot5}{3^3\cdot5}\right)=\log_5 5=1$

4. Efectúa:

$$\left(2\sqrt{3}-5\right)^2+\left(2\sqrt{3}+5\right)^2$$

Solución:

$$\left(2\sqrt{3}-5\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5+5^2=4\cdot 3-20\sqrt{3}+25=37-20\sqrt{3}$$

$$\left(2\sqrt{3}+5\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5+5^2=4\cdot 3+20\sqrt{3}+25=37+20\sqrt{3}$$

$$\left(2\sqrt{3}-5\right)^2+\left(2\sqrt{3}+5\right)^2=74$$

5. ¿Cuántos años ha de estar depositada una cierta cantidad a un interés compuesto del 4% anual, para que se duplique?

Solución:

$$C_f=C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

$$C_f=2C_i \Rightarrow 2=\left(1+0.04\right)^t \;;\; t=\frac{\log 2}{\log 1.04}\simeq 17.67 \Rightarrow t=18 \text{ años}$$

6. Factoriza: $3x^4-4x^3-9x^2+10x$

Solución:

$$3x^4-4x^3-9x^2+10x=x\left(3x^3-4x^2-9x+10\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -9 & 10 \\ 1 & & 3 & -1 & -10 \\ \hline & 3 & -1 & -10 & \underline{|0} \\ 2 & & 6 & 10 & \\ \hline & 3 & 5 & \underline{|0} & \end{array}$$

$$3x^4-4x^3-9x^2+10x=x\left(3x+5\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

7. Efectúa:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}\right)$$

Solución:

$$\left[\frac{\left(1+x\right)^2-\left(1-x\right)^2}{1-x^2}\right]\cdot\frac{3+x^2}{4x}=\frac{1+2x+x^2-\left(1-2x+x^2\right)}{1-x^2}\cdot\frac{3+x^2}{4x}=\frac{4x}{1-x^2}\cdot\frac{3+x^2}{4x}=\frac{3+x^2}{1-x^2}$$