

IES SENARA
BABILAFUENTE

Dpto. de Matemáticas

MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º DE ESO B

TRABAJO DE VERANO 2021

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

NÚMEROS REALES

1. Calcula:

$$\text{a) } \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} - \frac{2}{5} : \frac{8}{15} \quad \text{b) } \frac{\frac{5}{6} - \frac{1}{12}}{1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)} \quad \text{c) } 3 - \frac{16}{5} : \left(3 + \frac{1}{5}\right)^2$$

2. Halla de forma exacta la altura de un triángulo equilátero de 7 cm. de lado e indica si es un número racional o irracional.

3. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos:

$$\text{a) } -2 \text{ y } 5 \quad \text{b) } 5 \text{ y } 7 \quad \text{c) } -1/4 \text{ y } 3$$

4. Escribe en forma de desigualdad los siguientes intervalos, represéntalos gráficamente y clasifícalos:

$$A = (-1; 4) \quad B = [0; 3] \quad C = (-\infty; 4] \quad D = [-4; -1/2]. \text{ Calcula: } A \cup D; B \cap C; (A \cap D) \cup B$$

5. Redondea a cuatro cifras decimales los siguientes números, y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles son por exceso:

$$\text{a) } 23/7 = 3,2857142... \quad \text{b) } 18,6971 \quad \text{c) } \sqrt{5} = 2,236067977...$$

6. Trunca a tres cifras decimales los números anteriores. ¿Cómo son ahora todas las aproximaciones?

7. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al aproximar con dos cifras decimales estos números: a) $29/6 = 4,833...$ b) $\sqrt{6} = 2,44948974...$

8. Expresa en notación científica:

$$\text{a) } 372000000 \quad \text{b) } 0'00000058 \quad \text{c) } 43250000000$$

9. Opera y expresa en notación científica:

$$\text{a) } 2'05 \cdot 10^{15} \cdot 9'25 \cdot 10^{-9} \quad \text{b) } 3'12 \cdot 10^6 : (2'3 \cdot 10^{-4})$$

10. La longitud de una escalera, medida con una cinta métrica que aprecia hasta los centímetros, es de 4,56 m; por otro lado, el peso de un elefante, obtenido con una báscula que aprecia hasta los kg, es de 4554 kg. Determina qué medida es más precisa y explica por qué.

Sol: Es más precisa la medida del peso.

11. Calcula y simplifica estas expresiones:

$$\text{a) } \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{6} - \frac{4}{12}\right)^{-1} : \frac{6}{5} + 1 = \quad \text{b) } \left(\frac{1}{5} - 2\right)^{-2} - \left(2 - \frac{1}{5}\right)^{-2} = \quad \text{c) } \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{6}\right) =$$

12. Escribe tres números racionales comprendidos entre los números $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$. (Hay infinitos)

13. Escribe tres números irracionales comprendidos entre 1,001 y 1,002. (Hay infinitos)

14. Carmen estima que la gata de Juan pesa 3kg y este, que el perro de Carmen pesa 15kg. Averigua qué estimación es más precisa, sabiendo que la gata y el perro pesan, respectivamente, 5kg y 13 kg.

15. Calcula el resultado de la siguiente operación expresando primero los números como producto de potencias de base un número primo: $\frac{25 \cdot 0,0002 \cdot 7,5}{0,625}$

16. Efectúa y expresa el resultado en notación científica: $\frac{5 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^6 - 5 \cdot 10^5}$

RADICALES

1. Opera y simplifica:

$$a) \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}} =$$

$$b) \frac{\frac{1}{2}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{108}}{\frac{1}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{5}\sqrt{75}} =$$

2. Efectúa las siguientes operaciones dejando el resultado en forma de un único radical:

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{16} = ; b) (\sqrt[4]{125} : \sqrt{5}) : \sqrt{5\sqrt{5}} = ; c) \sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a^3}} =$$

3. Simplifica las siguientes expresiones de radicales:

$$a) \frac{\sqrt{18} + 3\sqrt{2} - \sqrt{50}}{\sqrt{8} - 3\sqrt{2}} ; b) \frac{4\sqrt{12} - 6\sqrt{3}}{2\sqrt{27}} ; c) \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{-3}{125}}$$

4. Racionaliza:

$$a) \frac{4 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} ; b) \frac{6\sqrt{54}}{\sqrt{3}} ; c) \frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} ; d) \frac{3}{\sqrt[3]{36}}$$

5. Calcula, sin emplear la calculadora, las soluciones de las siguientes raíces:

$$a) \sqrt{144} \quad b) \sqrt{\frac{121}{169}} \quad c) \sqrt[4]{1296} \quad d) \sqrt{-\frac{9}{16}} \quad e) \sqrt[5]{1024} \quad f) \sqrt{5625}$$

6. Extrae factores de los radicales:

$$a) \sqrt[3]{8b^3a^7} \quad b) \sqrt[4]{\frac{125a^5}{16b^3}} \quad c) \sqrt[3]{8x^4y^7z} \quad d) \sqrt[9]{\frac{a^{24}b^{-12}c^{12}}{a^{-3}b^{-10}c^5}} \quad e) \sqrt[5]{-32a^{12}b^7} \quad f) \sqrt{(x^{12}y^7)^5}$$

7. Introduce los factores dentro de la raíz:

$$8. a) 2\sqrt[4]{3} \quad b) \frac{2}{x}\sqrt{\frac{3x}{8}} \quad c) \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}} \quad d) 3xy\sqrt[3]{xy^4} \quad e) \frac{3}{5}\sqrt[4]{\frac{75}{81}} \quad f) 2ab\sqrt{3ab}$$

9. Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

$$a) \sqrt{72} - \sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{200} = ; \quad b) 2\sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 4\sqrt{12} - 7\sqrt{48} + \sqrt{300} =$$

$$c) \sqrt{125} - 3\sqrt{80} + \sqrt{20} + 2\sqrt{45} = ; \quad d) \sqrt{12} + 4\sqrt{72} - 5\sqrt{24} + 3\sqrt{8} - \sqrt{27} - \sqrt{54} =$$

10. Calcula:

$$a) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 \quad c) (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \quad e) (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{32}) \quad g) 4\sqrt{32} - 7\sqrt{50} + 3\sqrt{48} \quad i) \sqrt{5} \sqrt[3]{2} \sqrt[5]{3}$$

$$b) (2 - \sqrt{3})^2 \quad d) (3\sqrt{2} - 1)(3\sqrt{2} + 1) \quad f) (4 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2}) \quad h) 3\sqrt{27} - 5\sqrt{75} + 4\sqrt{12} \quad j) \sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{5}$$

11. Demuestra que los radicales siguientes son semejantes:

$$a) \sqrt{12} ; \sqrt{243} ; \sqrt{75} \quad b) \sqrt{18} ; -7\sqrt{2} \quad c) \sqrt[3]{125a^4} ; \sqrt[3]{27a^7} \quad d) 5\sqrt{2} ; 3\sqrt{8} ; \sqrt{2}$$

12. Reduce al mismo índice los siguientes radicales:

$$a) \sqrt{3} ; \sqrt[6]{5} ; \sqrt[10]{7} \quad b) \sqrt[15]{5} ; \sqrt[3]{7} ; \sqrt[25]{6} \quad c) \sqrt{3} ; \sqrt[4]{6} ; \sqrt[12]{18} \quad d) \sqrt[3]{9} ; \sqrt[6]{4} ; \sqrt{5}$$

13. Calcula:

$$a) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \quad b) \sqrt{2} \cdot \sqrt{37} \cdot 3\sqrt{12} \quad c) \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt[6]{32} \quad d) \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10}$$

14. Racionaliza:

$$a) \frac{6}{\sqrt{2}} \quad b) \frac{10}{\sqrt[3]{25}} \quad c) \frac{14}{2\sqrt{5}-\sqrt{13}} \quad d) \frac{8}{\sqrt[3]{12}} \quad e) \frac{5}{4-\sqrt{11}} \quad f) \frac{\sqrt{2}-5}{2+\sqrt{5}} \quad g) \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

15. Responde si es cierto o falso, justificando la respuesta:

$$a) \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} = x + y - \sqrt{2xy} \quad b) \sqrt{x^2 - y^2} = x - y \quad c) \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy} = x - y$$

16. Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

$$a) 2\sqrt{72} - 3\sqrt{50} + 5\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{200} = \quad ; \quad b) 3\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - 7\sqrt{48} + \sqrt{300} = \\ c) \sqrt{125} - 4\sqrt{80} + 3\sqrt{20} + 2\sqrt{45} = \quad ; \quad d) \sqrt{12} + 3\sqrt{72} - 4\sqrt{24} + \sqrt{8} - 3\sqrt{27} - \sqrt{54} =$$

17. Calcula:

$$a) (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 = \quad b) (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = \quad c) (2\sqrt{5} + \sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \\ d) 6\sqrt{32} - 5\sqrt{50} + 4\sqrt{48} = \quad e) \sqrt{2} \sqrt[3]{4} \sqrt[5]{2} = \quad f) \frac{\sqrt{12} \sqrt[3]{5}}{\sqrt{6} \sqrt[4]{5}} =$$

18. Racionaliza:

$$a) \frac{6}{\sqrt{2}} \quad b) \frac{10}{\sqrt[3]{4}} \quad c) \frac{14}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \quad d) \frac{8}{\sqrt[3]{14}} \quad e) \frac{5}{4-\sqrt{11}} \quad f) \frac{\sqrt{3}-5}{3+\sqrt{5}} \quad g) \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

19. Opera y simplifica: $a) \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$ $b) \frac{\sqrt{18} + 3\sqrt{2} - \sqrt{50}}{\sqrt{8} - 3\sqrt{2}}$ $c) \frac{\frac{1}{2}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{108}}{\frac{1}{4}\sqrt{48} + \frac{1}{5}\sqrt{75}}$ $d) \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + \sqrt[3]{\frac{-3}{125}}$

LOGARITMOS

1. Utiliza la definición de logaritmo para calcular el valor de los siguientes números:

a) $\log_3 27$ b) $\log_5 5^4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 9^{-2}$ d) $\log_7 \sqrt{343}$ e) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 625$

f) $\log \sqrt{0,0001}$ g) $\log \frac{1}{\sqrt{100}}$ h) $\log \sqrt[4]{10}$ i) $\log 10^{-5}$ j) $\log 10^0$

2. Utilizando la calculadora, halla el valor aproximado de estos números:

a) $\frac{13^{90}}{5^{18}}$; b) $\frac{17^{85}}{13^{37}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{227^{131}}{5^{35}}}$; d) 897^{55} Explica cómo lo obtienes.

3. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\log_3 27 - \log_5 125 + \log_7 7^4$ b) $\log(0,001) + \lg 100 + \log(1000) - \log \sqrt{10}$ c) $\log_2(\log_2(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}))$

4. Expresa en función de $\log 2$ y $\log 3$:

a) $\log 5$ b) $\log 24$ c) $\log 18$ d) $\log\left(\frac{8}{3}\right)$ e) $\log_3 \sqrt{45}$ f) $\log_2 54$

5. Calcula, simplificando al máximo y dejando el resultado en forma de logaritmo:

a) $2 \log 5 - 3 \log 35 + \log 175$ b) $\log 15 + \log 24 - \log 225$ c) $\frac{1}{3} \log 2 + \frac{1}{4} \log 2 - \frac{3}{4} \log 2$

6. Halla la base de los siguientes logaritmos:

a) $\log_a 625 = 4$ b) $\log_a 0,001 = 3$ c) $\log_a 0,01 = -2$ d) $\log_a 27 = 3$ e) $\log_a \frac{1}{625} = 4$ f) $\log_a \frac{1}{343} = -5$

7. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{\log 6 + \log 2}{\log 9 + \log 8 - \log 6}$ b) $\log 125 - 3(1 - \log 2)$ c) $\frac{\log 6 + \log 3 - \log 2}{\log 9 - \log 3}$ d) $10^{-2 \log 2}$ e) $\frac{1 + \log 8}{\log 5 + 2 \log 4}$

8. Calcula a) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 8 + \log_2 \frac{1}{4}$ b) $\log_3 1 + \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3}$ c) $\log_a (a^{\sqrt[5]{a}}) + \log_{1/a} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} \right)$

9. Calcula durante cuánto tiempo se han invertido 3000€ a un interés compuesto del 2,5% si el capital final ha sido 3525€

10. Dos capitales, uno el doble que el otro, se colocan a interés compuesto: el menor al 3% y el mayor al 1,25%. ¿Al cabo de cuántos años se habrán igualado los capitales finales?

POLINOMIOS

1. Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x-2y)^2$ b) $(x^2+2x-1)^2$ c) $\left(\frac{3}{2}-2x^2\right)^2$

2. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios, para el valor de x que se indica:

a) $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 4x - 8$; $x = -2$

b) $Q(x) = x^2 - 3x + 5$; $x = 3$

c) $R(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 12$; $x = -1$

3. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(3x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 4) : (3x^2 - x + 2)$ b) $(2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 5x + 6) : (2x^2 - 3)$

4. Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(3x^5 + 2x + 1) : (x + 1)$ b) $(x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 5) : (x + 3)$

5. Aplicando el teorema del resto, halla el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 2x^2 - 3) \div (x - 1)$ b) $(a^3 - 1) \div (a - 1)$ c) $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) \div (x + 2)$

6. Calcula el valor de m en los siguientes polinomios para que sean divisibles por los binomios que se indican:

a) $(5x^4 + mx^3 + 2x - 3) \div (x + 1)$ b) $(3x^2 - mx + 10) \div (x - 5)$ c) $(3x^3 - 7x^2 - 9x - m) \div (x - 3)$

7. Calcula los valores de m y n para que la siguiente división sea exacta:

$(3x^4 + mx^3 - 5x^2 - 5x + n) : (x^2 - 1)$

8. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$ b) $x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2$ c) $3x^4 - 16x^3 + 23x^2 - 6x$ d) $2x^5 - x^3 - 3x$

9. Halla el polinomio de segundo grado que cumple las siguientes condiciones:

El coeficiente principal es 3, es divisible por $(x+1)$ y el resto de su división por $(x-2)$ es -9 .

FRACCIONES ALGEBRAICAS

10. Calcula el valor que debe tener a para que el polinomio $(a+1)x^3 - (2a-1)x^2 + ax - 7$ sea divisible por $x+2$.

11. Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

a) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x-1} - \frac{1-x}{x^2-1}$ b) $\frac{4}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{x+1}{x-1}$ c) $\frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x+2} - \frac{x+10}{2x^2-8}$

12. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ d) $\frac{3x^2-6x-9}{2x-6}$ g) $\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-1}$ j) $\frac{3x^4-11x^3+9x^2-11x+6}{3x^3-8x^2-5x+6}$
 b) $\frac{x^2-x-6}{x-3}$ e) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-8x+7}$ h) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ k) $\frac{2x^3-5x^2-x+6}{x^4+2x^3-5x^2-6x}$
 c) $\frac{x^4-9x^2}{x^3+5x^2+6x}$ f) $\frac{x^3-7x^2+10x}{25x-x^3}$ i) $\frac{x^3-9x}{x^4+5x^3+6x^2}$ l) $\frac{x^2(x+2)-9(x+2)}{x^2(x+3)+2x(x+3)}$

13. Opera y simplifica:

a) $\frac{1}{x-3} - x + \frac{2}{x}$ c) $\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \cdot (x^4 + x^3)$ e) $\left(x + \frac{x}{x-1}\right) : \left(x - \frac{x}{x-1}\right)$ d) $\left(\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2}\right) \cdot \frac{2x}{x^2+4}$
 b) $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \frac{x^2-1}{2x^2}$ d) $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) \cdot \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4}\right)$ f) $\frac{3}{x+1} \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)$ g) $\left(\frac{x+1}{x-3} - \frac{x+3}{x+1}\right) : \frac{8(x-1)}{x^2-9}$

14. Halla el polinomio $P(x)$ para que se cumplan las siguientes equivalencias de fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-5}{x+1} = \frac{P(x)}{x^2-2x-3}$ b) $\frac{x}{x^2+2x} = \frac{x-1}{P(x)}$

15. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^4-1}{x^4+x^2}$ b) $\frac{x^3-2x+x}{x^3-3x^2+3x-1}$ c) $\frac{2x^3+3x^2+6x+9}{2x^4+3x^3-2x-3}$ d) $\frac{x^3-x-3x^2+3}{x^2-1}$

ECUACIONES Y SISTEMAS

Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

16. Ecuaciones de primer grado:

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{3+x}{2} + \frac{4-x}{3} = 5 \left(\frac{9+3x}{2} - 1 \right) & c) \frac{x+3}{21} = \frac{5-2x}{14}; & e) \frac{1+3x}{5} - 3(x-2) = \frac{2x-3}{3} + 1 - x \\
 b) \frac{3x+4}{6} + \frac{3x+1}{3} = \frac{11}{6} + \frac{x}{4} & d) \frac{5-x}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{x-3}{2} \right) = \frac{x+1}{6} & f) 2(x-2) - \frac{x-5}{2} = \frac{1-2x}{3} - (3-x)
 \end{array}$$

17. Ecuaciones bicuadradas:

$$\begin{array}{llll}
 a) x^4 - 10x^2 + 9 = 0; & c) 7x^4 = 14x^2 & e) x^4 - 2x^2 - 8 = 0 & g) x^4 - 10x^2 + 16 = 0 \\
 b) x^4 - x^2 - 12 = 0 & d) 3x^4 - 12x^2 = 0 & f) 2x^4 - 7x^2 - 9 = 0 & h) 3x^4 - 4x^2 - 4 = 0
 \end{array}$$

18. Ecuaciones racionales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{-2}{x-8} & c) \frac{x-4}{3} = \frac{x^2}{x+42} & e) \frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = -5 \\
 b) \frac{x+2}{x-1} - 2 = \frac{4-x}{2x} & d) \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{13x+1}{3x} & f) \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{1-x}
 \end{array}$$

19. Ecuaciones irracionales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sqrt{x-1} = \frac{x-1}{\sqrt{9-x}}; & c) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 2; & e) \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} = 1 \\
 b) x + \sqrt{x} = 2 & d) 1 + \sqrt{x} = \sqrt{x+1} & f) \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-3} = 1
 \end{array}$$

20. Resuelve, por factorización, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 a) x^3 + x^2 - 2 = 0 & c) x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0; & e) x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0 \\
 b) x^2(x-1)^2 - 5x^2(x-1)^2 = 0 & d) x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0 & f) 2x^4 + 4x^3 - 22x^2 - 24x = 0
 \end{array}$$

21. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases}; & b) \begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{3} = 0 \\ 4x+1 = 2y-1 \end{cases}; & e) \begin{cases} y = 2x+1 \\ y = \frac{x-3}{3} \end{cases}; & g) \begin{cases} 4x+1 = 2y-1 \\ (x+1)^2 - y = x^2 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} & d) \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{cases} & f) \begin{cases} -2x + \frac{y-2}{3} = -2 \\ 4x - \frac{y+4}{6} = 3 \end{cases} & h) \begin{cases} 5(x-1) - 4(y-2) = -1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 2 \end{cases}
 \end{array}$$

22. Indica si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son compatibles o incompatibles. Resuelve aquellos que sean compatibles, indicando cuántas soluciones tienen:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x - 6y = -3 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 9x - 6 = 12y \end{cases}; \quad c) \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases}; \quad d) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

23. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$$\begin{array}{llll}
 a) \begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} & c) \begin{cases} 6x + y = 5 \\ x^2 - y + 1 = 3x \end{cases}; & e) \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - y^2 = 25 \end{cases}; & g) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x^2 + 3x - y = 6 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 15 \end{cases} & d) \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 6 \\ 2x^2 + 2y^2 + y = 12 \end{cases} & f) \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 = y^2 - 5 \end{cases} & h) \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ xy = -12 \end{cases}
 \end{array}$$

24. Halla un número de dos cifras tal que la diferencia entre la cifra de las decenas y la de las unidades es de una unidad y cuya suma es la séptima parte del valor del número
25. Si se divide un cierto número por 9, da de resto 1, y si se divide por 7, aumentarán el cociente y el resto anteriores en 2 unidades. Calcula dicho número.
26. Halla un número de dos cifras tales que la diferencia de sus cifras es 2 y su suma es la séptima parte de dicho número.
27. Halla la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y su superficie mide 24 cm².
28. Calcula el perímetro de un rombo si la diferencia entre sus diagonales es de 4 cm y abarca una superficie de 96 cm².
29. La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 4. ¿De qué números se trata?
30. La cuarta parte de un campo está plantada de vides, los 4/7 están sembrados de trigo y el resto de patatas. Las vides ocupan 43 áreas más que las patatas. ¿Cuál es la superficie del campo?

INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa su solución en la recta real:

a) $2x - 3 < x - 1$ b) $\frac{3x - 2}{2} \leq \frac{2x + 7}{3}$ c) $-3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$ d) $\frac{3x}{5} - x > -2$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa su solución en la recta real.

a) $\frac{5x - 2}{3} \geq \frac{5 - x}{4}$ c) $\frac{x - 3}{x} + \frac{x + 3}{x^2} \leq \frac{2}{3}$ e) $x^4 - 3x^2 \leq 4$ g) $3x^3 + 12x^2 + 12x \leq 0$
b) $-2x^2 + 7x - 6 > 0$ d) $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) > \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$ f) $4x^5 - x^3 > 0$ h) $x^2 - 7x - 8 \leq 0$

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una variable. Expresa su solución mediante intervalos.

a) $\begin{cases} \frac{x-15}{2} \leq 5-2x \\ 2-x < \frac{1-x}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+3}{2-x} < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5(2-x) > 3x-8(x+4) \\ x(7-2x) > 2x(5-x)+10x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-2(x+1) \geq 5(2x-1)-6 \\ 2(x-1)+4x > 5x-4 \end{cases}$

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una variable y representa su conjunto solución en la recta real::

a) $\begin{cases} 4x-3 < 1 \\ x+6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2 > -7 \\ 5-x < 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5-x < -12 \\ 16-2x < 3x-3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 5x+1 \leq 0 \end{cases}$

5. ¿Para qué valores de m la ecuación $8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$ tiene soluciones reales?

6. María tiene 7 años menos que su hermano Juan. ¿Cuántos años puede tener María si sabemos que el triple de su edad es mayor que el doble de la de su hermano?

7. Una empresa paga a sus trabajadores eventuales 30€ por cada una de las 20 primeras horas de trabajo. A partir de ahí, cobran a 18€ la hora. ¿Cuántas horas deben trabajar para ganar más de 1500€?

8. Recuerda que cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Si los lados de un triángulo miden $5x-12$; $2x+24$ y $x+36$, ¿entre qué valores puede variar x ?

9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado y expresa su solución mediante intervalos:

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ b) $5 - x^2 < 0$ c) $x^2 + 3x > 0$ d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones: de grado superior a dos y expresa su solución como unión de intervalos:

a) $(x-1)(x+2)(x-5) \leq 0$ b) $(x-3)^2(x+3)^3(x-5) \leq 0$ c) $x^3 - 4x > 0$ d) $x^3 - 3x^2 \geq 0$

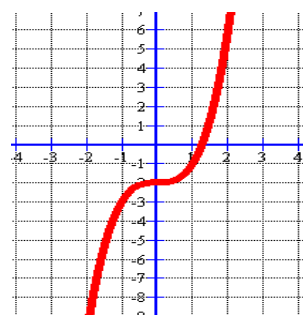
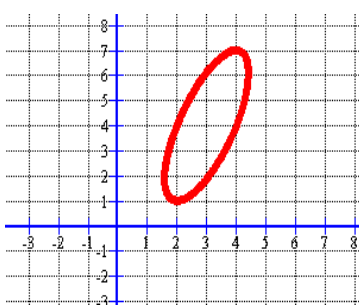
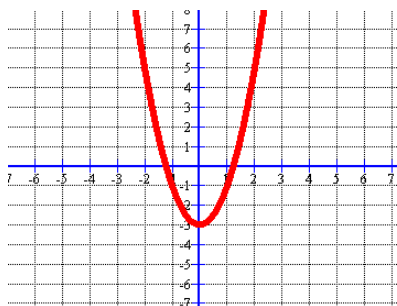
11. Determina para qué valores de m la inecuación $3x^2 - (m-2)x + 7 > 0$ tiene por solución toda la recta real.

12. Un meteorólogo dice que en el mes de abril el triple del número de días que ha llovido es menor que el doble de los días que no lo ha hecho. ¿Cuál ha sido, como máximo el número de días que ha llovido?

13. A una excursión van 40 estudiantes y se sabe que el cuadrado del número de chicas es menor que el doble del número de chicos. ¿Cuántas chicas, irán a la excursión, a lo sumo?

FUNCIONES

1. Indica cuáles de las siguientes gráficas son funciones:



2. Estudia el dominio o campo de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x^2 + 3x - 1)$ b) $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x^2 - 9}}$ c) $h(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ d) $k(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

e) $m(x) = 2\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$ f) $n(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x-3}}$ g) $p(x) = \frac{x-7}{x^2 - 8x + 12}$ h) $q(x) = \text{sen}\left(\frac{x+1}{x^3 - 1}\right)$

3. Indica el tipo de simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$ c) $h(x) = \frac{(x+3)^2}{x^2 - 2x}$ d) $k(x) = \frac{x^3 + 6x}{x^2 - 2}$ e) $m(x) = \frac{x-5}{x^2 + 3}$

4. Halla el dominio de las siguientes funciones:

$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$; $g(x) = \log(8 - x)$; $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$

5. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = 3^x$

6. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$. Halla:

a) Su dominio; b) las ecuaciones de sus asíntotas; c) ¿Para qué valores de x no es continua?

7. El alquiler de un piso es de 500€ mensuales. Si en el contrato se hace constar que se subirá un 3% anual, calcula:

- La función que expresa el precio del alquiler en función del número de años.
- El precio del alquiler dentro de diez años.
- ¿Cuántos años tendrán que transcurrir para que se duplique el alquiler?
- ¿Es una función continua? (¿Se pueden unir sus puntos?) ¿Por qué?

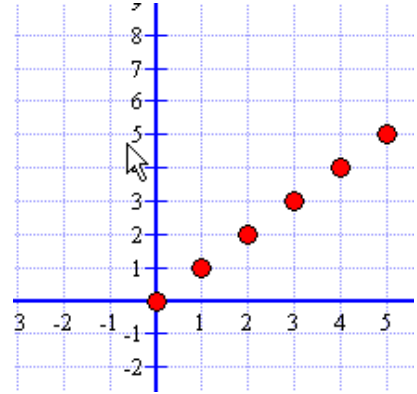
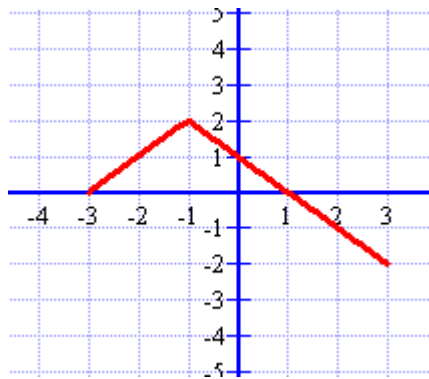
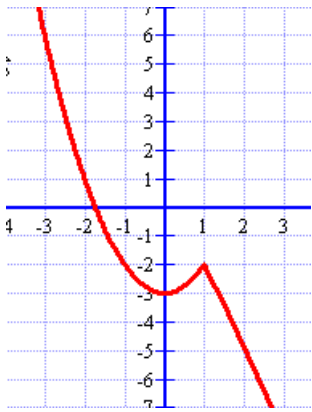
8. Clasifica y representa la función $f(x) = \frac{4}{x}$. Indica si la función es creciente o decreciente y si es continua. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

9. Estudia y representa gráficamente la función lineal $f(x) = -2x$.

10. Escribe la expresión de la función lineal que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(3, -2)$. Indica su pendiente y su ordenada en el origen. ¿Es creciente o decreciente?

11. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función $f(x) = 3x - 6$. Representala gráficamente.

12. En cada una de estas funciones indica:
 a) Su dominio; b) Si es o no continua; c) Monotonía; d) Máximos y mínimos.



13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ -3 + x & \text{si } x > 2 \end{cases}$
- a) Calcula: $f(-3)$; $f(4)$; $f(-1/2)$; $f(2)$
- b) ¿Cuál es su dominio? c) ¿Presenta alguna discontinuidad? d) ¿En qué punto alcanza un máximo?
14. Escribe la ecuación de una función afín que pasa por los puntos $P(2,5)$ y $Q(-1,4)$. Indica cuál es el valor de su pendiente y el punto correspondiente a su ordenada en el origen. Representala gráficamente.
15. El perímetro de un rectángulo mide 8 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base. Determina el dominio o campo de definición de esta función. Representala e indica el valor del lado de la base para el que el área se hace máxima.
16. Representa las funciones exponenciales $y = 2^x$; $y = -2^x$ ¿Qué observas?
17. Representa la gráfica correspondiente a $\log_2 x$. Apóyate para ello en la función $y = 2^x$. Realiza su estudio.
18. La bacteria Eberthellatypcosa se reproduce por bipartición cada hora. Si partimos de un millón de bacterias, calcula: a) La función que expresa el número de bacterias en función del tiempo. b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de un día? c) ¿Qué tiempo tiene que transcurrir para tener más de 16 millones de bacterias?
19. Para recolectar las fresas de una huerta, 20 trabajadores tardan 5 días. Calcula la función que da el número de días en función del número de trabajadores. ¿Qué tipo de función es?

COMBINATORIA

- Sean los conjuntos $A=\{1, 2\}$ y $B=\{a, b, c\}$
¿Cuántas relaciones entre A y B se pueden establecer?
Solución: 9.
- ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir dos premios distintos entre Ramón, Juan, Teresa y María, de modo que ninguno de ellos reciba los dos premios?
Solución: 12.
- ¿De cuántos modos diferentes se pueden colocar un plato de carne y otro de pescado en cuatro bandejas de un frigorífico si no se quiere poner dos platos en la misma bandeja?
Solución: 12.
- Se tienen cuatro franjas de papel cuyos colores son blanco, rojo, azul y verde. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar? Haz un diagrama en árbol.
Solución: 24.
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en un banco de tres asientos?
Solución: 120.
- ¿Cuántos números de tres cifras se pueden escribir con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si ninguna de ellas se puede repetir?
Solución: 648.
- Un barco dispone de ocho banderas. ¿Cuántas señales puede mostrar si cada señal consiste en tres banderas colocadas verticalmente en un asta?
Solución: 336.
- Se sabe que el número de variaciones ordinarias de orden 2 de m elementos es 30. ¿Cuál es el valor de m?
Solución: $m=6$.
- ¿Cuántos productos diferentes, con cuatro factores, se pueden formar con los números primos comprendidos entre 2 y 19, ambos inclusive,
a) sin repetir ningún factor?
b) pudiendo repetir?
Solución: a) 1680; b) 4096.
- Un chico decide pintar las cuatro paredes de su habitación; dispone de pintura de los siguientes colores: azul, verde, blanco, rojo y marrón. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si cada pared ha de quedar pintada de un solo color?
Solución: 625.
- Al lanzar una moneda al aire, los resultados posibles son: obtener cara (c) y obtener cruz (x). ¿Cuántos son los resultados posibles al lanzar tres monedas?
Solución: 8.
- Se lanzan tres dados diferentes: ¿Cuántos resultados distintos pueden aparecer?
Solución: 216.
- ¿Cuántas rectas determinan siete puntos situados en el plano, si no hay tres de ellos en línea recta?
(*Observación:* Dos puntos determinan una recta.)
Solución: 21.
- Calcular de cuántas formas diferentes pueden repartirse tres premios distintos entre quince concursantes si: a) Cada concursante sólo puede recibir un premio. b) Un mismo concursante puede recibir varios premios.
Solución: a) 2.730; b) 3.375
- En un parque hay un camino que une cada dos bancos. ¿Cuántos bancos hay si en total son 36 caminos?
Solución: 9.

16. Los alumnos de una clase formada por 15 chicos y 15 chicas quieren representar una obra de teatro con 5 personajes femeninos y 3 masculinos. ¿Cuántos repartos distintos se pueden hacer?
Solución: 983.782.800
17. a) ¿Cuántos números de dos cifras se pueden escribir con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9?; b) ¿Cuántos son pares?; c) ¿Cuántos terminan en tres?; d) ¿Cuántos empiezan por 1?
Solución: a) 25; b) 0; c) 5; d) 5.
18. a) ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden escribir con los guarismos 1, 3, 4, 5 y 6?; b) ¿En cuántos de ellos figura el 3 en las decenas?; c) ¿Cuántos son pares?
Solución: a) 625; b) 125; c) 250;
19. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?
Solución: 24.
20. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra PERMUTACIÓN? ¿Cuántas empiezan por E y terminan en ON?
Solución: 39.916.800; 40.320
21. En un torneo participan 5 equipos. Forma todas las clasificaciones posibles del torneo.
Solución: 120.
22. Calcula la suma de todos los números de tres cifras diferentes que se pueden formar con las cifras 2, 4 y 6.
Solución: 2.664.
23. Se presentan 30 candidatos a unas elecciones para elegir 3 diputados. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer la elección?
Solución: 4.060
24. Un estudiante debe responder a ocho de las 20 preguntas de que consta un cuestionario. ¿Cuántos grupos de respuestas distintas puede elegir?
Solución: 125.970
25. En un programa de televisión hay 8 presentadores. Cada vez aparecen tres. ¿Cuántos programas podemos ver sin que se repitan los tres?
Solución: 56.
26. Se dispone de 15 libros distintos; 6 están encuadernados en cuero, 5 en tela y 4 en rústica. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en un estante de modo que no se separen los volúmenes de un mismo tipo de encuadernación?
Solución: $3! \cdot (6! \cdot 5! \cdot 4!) = 12.441.600$
27. Con un piano de juguete de 24 notas (dos octavas completas) ¿cuántos sonidos diferentes pueden conseguirse empleando cada vez cuatro notas como máximo?
Solución: 12950
28. ¿De cuántas formas pueden ordenarse 17 bolas de billar, si hay siete negras, seis rojas y cuatro blancas?
Solución: 4.084.080
29. ¿Cuántas palabras de 5 letras podemos formar que tengan las mismas letras que la palabra BARRA. ¿Cuántas empiezan por A y terminan por R?
Solución: 30 y 6.
30. ¿De cuántas maneras se pueden introducir ocho tarjetas postales diferentes en ocho sobres de distintos colores, suponiendo que en un sobre no puede meterse más de una tarjeta?
Solución: 40.320
31. En una reunión hay 3 chicas y 7 chicos. a) ¿Cuántos grupos de cuatro personas podemos formar? ¿Y si en cada grupo hay dos chicos y dos chicas?
Solución: a) 210; b) 63.

32. Con las cifras 2, 3, 4, 5, 6 y 8, a) ¿cuántos números de tres cifras podemos formar?; ¿cuántos de ellos serán impares y mayores que 600?; b) ¿cuántos números de cuatro cifras distintas podemos formar que sean menores que 5.000 y terminen en 2?
Solución: a) 216 y 12; b) 24.
33. Tres matrimonios van al cine y se sientan en 6 butacas consecutivas.
a) ¿De cuántas formas pueden colocarse?
b) ¿Y si cada matrimonio se sienta ocupando dos butacas consecutivas?
c) ¿Y si los tres maridos se sientan en butacas consecutivas y las esposas también?
Solución: a) 720; b) 48; c) 72.
34. El alfabeto de un país está formado por 24 letras. Además, en ese país las matrículas de los coches se forman con dos letras seguidas de cuatro dígitos.
a) ¿Cuántos coches se pueden matricular con ese sistema?
b) ¿Cuántas de las matrículas tienen las letras iguales y los números distintos?
Solución: a) 5.760.000; b) 120.960
35. Del número de teléfono de un amigo recordamos que empieza por 30 y que además tiene dos doses, un cinco y dos nueves. ¿Cuántas llamadas tendremos que hacer como máximo para localizar a nuestro amigo?
Solución: 30
36. Un bote de 8 remos va a ser tripulado por un grupo seleccionado de 11 hombres, de los cuales tres pueden llevar el timón, pero no pueden remar, y el resto pueden remar pero no llevar el timón. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo si dos de los hombres sólo pueden remar a babor?
Solución: 25.920
37. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Se pide:
a) El número de subconjuntos de A con tres elementos.
b) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos.
c) El número de subconjuntos de A con tres elementos como máximo.
d) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos como mínimo.
e) El número de subconjuntos de A con cuatro elementos, dos pares y dos impares.
f) ¿Cuántos números distintos de cuatro cifras pueden escribirse con las cifras de A de modo que empiecen y terminen en cifra impar, y que las restantes cifras sean números pares? De estos, ¿cuántos tienen todas sus cifras distintas?
Solución: a) 35; b) 35; c) 64; d) 64; e) 18; f) 144 y 72.
38. De 7 españoles y 4 franceses se va a elegir un comité de 6 personas. ¿De cuántas maneras puede formarse,
a) de modo que haya exactamente dos franceses?
b) de modo que haya dos franceses como mínimo?
Solución: a) 210; b) 371.
39. En un estante de una librería capaz para 25 volúmenes, hay 7 ejemplares iguales de “El Quijote”, 8 ejemplares iguales de “La Celestina” y 10 ejemplares iguales de “La venganza de Don Mendo”. ¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse dichos libros?
Solución: 21.034.470.600
40. ¿Cuántos modelos de billete de tren se deben imprimir para cubrir un trayecto de diez estaciones, si en cada estación ha de figurar la estación de salida en primer lugar, y la llegada en segundo lugar?
Solución: 90.